Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Sud 14 novembre 2012

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. L'axe des abscisses est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$, donc la limite de f en $+\infty$ est : 0.
2. On lit comme coefficient directeur de la droite (T) : 4.
3. La fonction est croissante, donc le nombre dérivé est positif sur l'intervalle $[0~;~2]$.

Partie B

1. Dérivée d'une fonction produit : $g'(x) = \text{e}^{-2x} - 2x\text{e}^{-2x} = \text{e}^{-2x}(1-2x)$.
2. Une primitive de e^{-2x} est $-\dfrac{1}{2}\text{e}^{-2x}$. Donc
$\displaystyle\int_0^1 \text{e}^{-2x}\,\text{d}x = \left[-\dfrac{1}{2}\text{e}^{-2x}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{2}\text{e}^{-2} + \dfrac{1}{2}\text{e}^{-2\times 0} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\text{e}^{-2} = \dfrac{1}{2}\left(1-\text{e}^{-2}\right)$.
3. La valeur moyenne de la fonction est égale à =
$\dfrac{1}{3-1}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x}\,\text{d}x = \dfrac{1}{2}\left[\ln x\right]_1^3 = \dfrac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \dfrac{1}{2}\ln 3 = \ln 3^{\frac{1}{2}} = \ln\left(\sqrt{3}\right)$.

EXERCICE 2 **5 points**

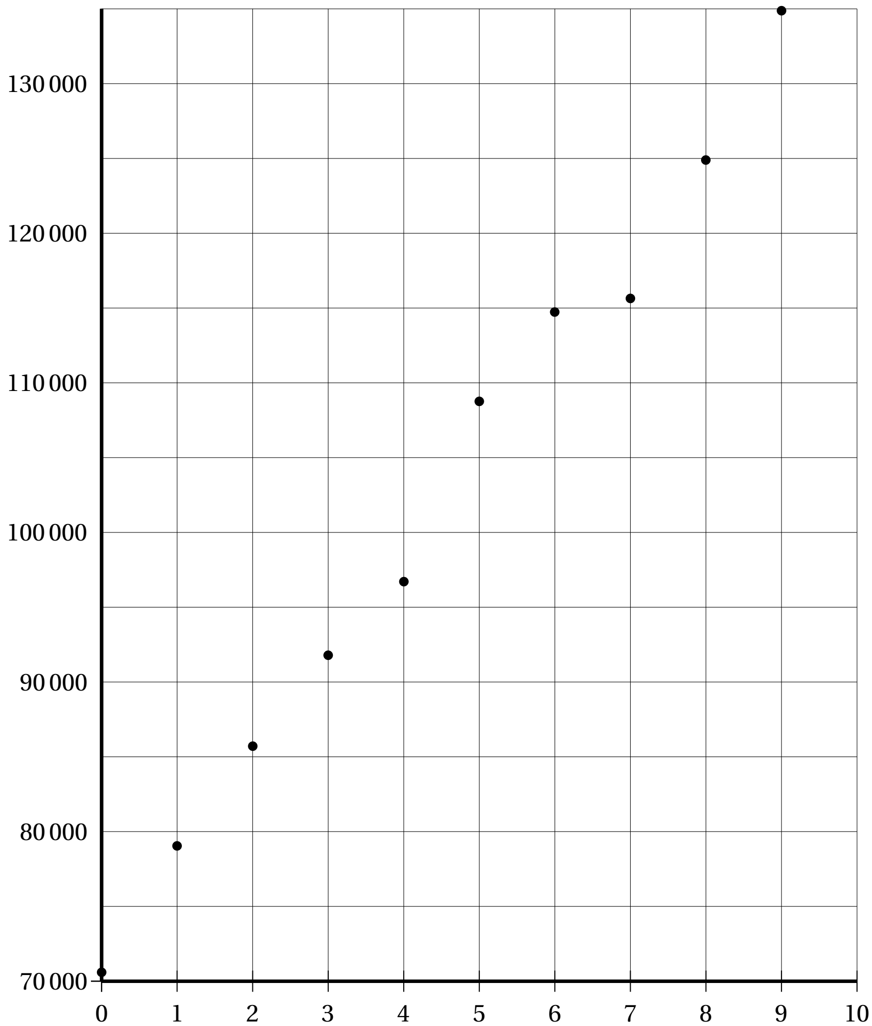
Commun à tous les candidats

1. L'augmentation est égale à : $\dfrac{134\,886 - 70\,589}{70\,589} \times 100 \approx 91,09$ soit environ 91 %.
2. Voir ci-dessous.
3. **a.** La calculatrice donne soue équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés $y = 6\,849x + 71\,453$.

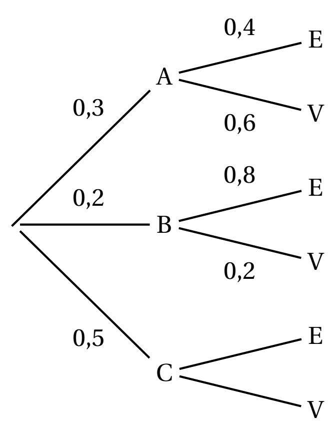
   b. 2012 correspond au rang 12 ; on peut donc prévoir : $6\,849 \times 12 + 71\,453 = 153\,641$.
4. On a le système : $\left\{\begin{array}{l c l} k\text{e}^0 & = & 70\,589\\ k\text{e}^{9p} & = & 134\,886\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} k & = & 70\,589\\ k\text{e}^{9p} & = & 134\,886\end{array}\right. \iff$
$\left\{\begin{array}{l c l} k & = & 70\,589\\ 70\,589\text{e}^{9p} & = & 134\,886\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} k & = & 70\,589\\ \text{e}^{9p} & = & \frac{134\,886}{70\,589}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} k & = & 70\,589\\ 9p & = & \ln\left(\frac{134\,886}{70\,589}\right)\end{array}\right.$
$\iff \left\{\begin{array}{l c l} k & = & 70\,589\\ p & = & \frac{1}{9}\ln\left(\frac{134\,886}{70\,589}\right)\end{array}\right.$ soit à peu près $\left\{\begin{array}{l c l} k & = & 70\,589\\ p & \approx & 0,072\end{array}\right.$
Une équation de la courbe d'ajustement est donc : $y = 70\,589\text{e}^{0,072x}$.
5. Avec cet ajustement on trouve pour $x = 12$, $70\,589\text{e}^{0,072\times 12} \approx 167\,482$. (licenciés)

EXERCICE 3 **5 points**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



1.



2. **a.** $p_A(E) = 0,4$ (énoncé)

b. On a $p_B(E) = 0,8$, donc $p_B(V) = 1 - 0,8 = 0,2$.

3. On a $p(C) = 1 - p(A) - p(B) = 1 - 0,2 - 0,3 = 0,5$.

4. Il faut calculer $p(A \cap V) = p(A) \times p_A(V) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$.

5. D'après la loi des probabilités totales on a :

$p(E) = p(A\cap E)+p(B\cap E)+p(C\cap E) \iff p(C\cap E) = p(E)-p(A\cap E)-p(B\cap E) = 0,7-0,3\times 0,4-0,2\times 0,8 = 0,7-0,12-0,16 = 0,42$.

6. Il faut trouver $p_C(E) = \dfrac{p(C\cap E)}{p(C)} = \dfrac{0,42}{0,5} = \dfrac{0,84}{1} = 0,84$.

EXERCICE 3 **5 points**

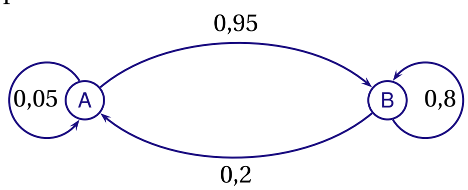
Candidat ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. $P_1 = \begin{pmatrix}0,2 & 0,8\end{pmatrix}$.

2. a. On a $p_{R_n}(R_{n+1}) = 0,05$ et $p_{R_n}(H_{n+1}) = 0,95$.

$p_{H_n}(R_{n+1}) = 0,2$ et $p_{H_n}(H_{n+1}) = 0,8$.

D'où le graphe probabiliste :



b. La matrice de transition telle que $P_{n+1} = P_n\times M$ est égale à : $M = \begin{pmatrix}0,05 & 0,95\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}$.

3. $P_3 = P_1\times M^2 = \begin{pmatrix}0,2 & 0,8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,05 & 0,95\\ 0,2 & 0,8\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0,1745 & 0,8255\end{pmatrix}$.

Au centième près, la probabilité que l'employé soit en retard le troisième jour est égale à 0,17.

4. a. Les termes de la matrice de transition n'étant pas nuls, l'état P_n converge vers un état stable P vérifiant $P = P\times M$ avec $x+y=1$ soit :

$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0,95x+0,8y\\ x+y & = & 1\end{array}\right.$

Donc $P \approx \begin{pmatrix}0,174 & 0,826\end{pmatrix}$.

b. On résout le système précédent :

$\left\{\begin{array}{lcl} 0,95x-0,2y & = & 0\\ x+y & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 4,75x-y & = & 0\\ x+y & = & 1\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{lcl} 5,75x-y & = & 1\\ x+y & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{1}{5,75}\\ y & = & 1-\dfrac{1}{5,75}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & \approx & 0,174\\ y & \approx & 0,826\end{array}\right.$

Donc $P \approx \begin{pmatrix}0,174 & 0,826\end{pmatrix}$ (au millième près).

EXERCICE 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. La fonction f est dérivable sur $[1~;~10]$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \dfrac{10}{x+1}-1 = \dfrac{10-x-1}{x+1} = \dfrac{9-x}{x+1}$.

Le dénominateur étant positif, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $9-x$.

$9-x \geqslant 0 \iff 9\geqslant x \iff x\leqslant 9$: sur $[1~;~9]$ la dérivée est positive donc la fonction f est croissante.

Sur $[9~;~10]$, $9-x\leqslant 0 \iff 9\leqslant x \iff x\geqslant 9$: sur $[9~;~10]$ la dérivée est négative, la fonction f est décroissante.

2. $f(9) = 10\ln 10-9 \approx 14,03$; $f(10) = 10\ln 11-10 \approx 13,98$.

3. Sur l'intervalle $[0\,;\,9]$, la fonction f est strictement croissante, continue car dérivable de $f(0) = 0$ à $f(9) \approx 14,03$: il existe donc un réel unique $\alpha \in [0\,;\,9]$ tel que $f(\alpha) = 10$.
   La calculatrice donne $f(2) \approx 8,99$ et $f(3) \approx 10,86$, donc $2 < \alpha 3$;
   $f(2,4) \approx 9,84$ et $f(2,5) \approx 10,03$, donc $2,4 < \alpha < 2,5$;
   $f(2,48) \approx 9,99$ et $f(2,49) \approx 10,01$, donc $2,48 < \alpha < 2,49$.
4. F est dérivable sur $[0\,;\,10]$ et sur cet intervalle,
   $F'(x) = 10\ln(x+1) + \dfrac{10x+10}{x+1} - 10 - 2x \times \dfrac{1}{2} = 10\ln(x+1) + 10 - 10 - x =$
   $10\ln(x+1) - x = f(x)$.
   F est donc une primitive de f sur $[0\,;\,10]$.

Partie B

1. On a vu dans la **partie A** que $f(9)$ est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$. Le nombre de puces à fabriquer pour un coût marginal maximum est $x = 9$, soit 900 puces.
2. On a vu que F définie par $F(x) = (10x+10) \times \ln(x+1) - 10x - \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,10]$.
   C est aussi une primitive de f, donc C est définie sur $[0\,;\,10]$ par
   $C(x) = (10x+10) \times \ln(x+1) - 10x - \dfrac{x^2}{2} + K$.
   Or $C(0) = 15 \iff (10 \times 0 + 10) \times \ln(0+1) - 10 \times 0 - \dfrac{0^2}{2} + K = 15 \iff K = 15$.
   Donc $C(x) = (10x+10) \times \ln(x+1) - 10x - \dfrac{x^2}{2} + 15$.
3. Comme $C'(x) = f(x)$, on a vu que f était croissante à partir de $f(0) = 0$, puis décroissante jusqu'à $f(10) \approx 13,98 > 0$: f est donc positive sur $[0\,;\,10]$ et par conséquent C est croissante sur cet intervalle de $C(0) = 15$ à
   $C(10) = 110\ln 11 - 100 - 50 + 15 \approx 128,77$.