Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Sud
16 novembre 2011

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** $u'(1) = \text{e}$ est faux; on a $u'(1) = 0$ (tangente horizontale)

   b. $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 0$. Vraie

   c. $\lim\limits_{x \to 3} u(x) = +\infty$. Vraie

   d. L'équation $u(x) = 1$ admet exactement trois solutions. Vraie

2. Soit f la fonction définie et dérivable sur $]-1\,;\,2[$ telle que $f = \ln(u)$.

   On note f' sa fonction dérivée.

   On a donc $f'(x) = \dfrac{u'}{u}$.

   a. Sur l'intervalle $]-1\,;\,0[$, f change de signe. x varie de -1 exclu à 0, donc u varie de 0 à 2; donc $\ln u$ varie de $-\infty$ à $\ln(2) > 0$ en passant par $\ln 1 = 0$, donc effectivement en changeant de signe. Vraie.

   b. $f'(1) = \dfrac{1}{\text{e}}$. $f'(1) = \dfrac{u'(1)}{u(1)} = 0$. Fausse.

   c. L'équation $f(x) = 2$ n'admet aucune solution. $f(x) = 2 \iff \ln u = 2 \iff u = \text{e}^2 \approx 7,4 > 2$. Vraie

   d. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$. Fausse on a vu que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Par lecture graphique répondre aux questions suivantes :

   a. Il n'y a saturation que pour $x = 4$ heures de travail quotidiennes.

   b. La fonction est croissante, donc il y a envie sur $[0\,;\,4[$.

   c. La fonction est décroissante, donc il y a rejet sur l'intervalle $]4\,;\,8]$.

   d. $v(4) = f'(4)0$

   On a donc $v(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

   Mais $v = f'$ signifie que f est une primitive de v.

   Donc $f(x) = a\dfrac{x^2}{2} + bx + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

   Or $f(0) = 0 \iff c = 0$;

   $f(4) = 100 \iff 8a + 4b = 100$ et

   $f(8) = 0 \iff 32a + 8b = 0$. Donc :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} 8a+4b &=& 100\\ 32a+8b &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 16a+8b &=& 200\\ 32a+8b &=& 0\end{array}\right. \Rightarrow \text{(par différence)}$$

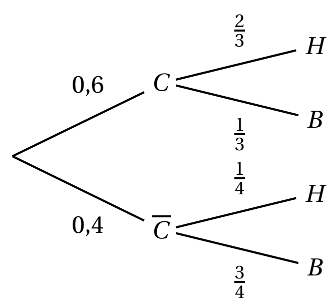
   $16a = -200 \iff a = -\dfrac{25}{2}$, puis $4b = 100 - 8a = 100 + 100 = 200 \iff b = 50$.

   Finalement $v(x) = -\dfrac{25}{2}x + 50$.

3. On a donc $f(x) = -\dfrac{25}{2}\dfrac{x^2}{2} + 50x$

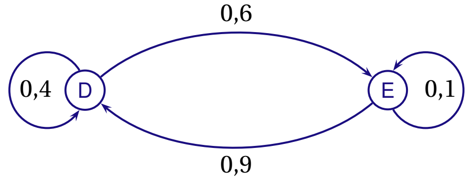
4. Équation : $f(x) = 75 \iff -\dfrac{25}{2}\dfrac{x^2}{2} + 50x = 75 \iff -25x^2 + 200x = 300 \iff$
   $-25x^2 + 200x - 300 = 0 \iff x^2 - 8x + 12 = 0$
   Résolvons cette équation du deuxième degré : $\Delta = 64 - 48 = 16 = 4^2 > 0$.
   Cette équation a donc deux solutions :
   $$\frac{8+4}{2} = 6 \quad \text{et} \quad \frac{8-4}{2} = 2$$
   Les 75 % de satisfaction sont atteints pour $x = 2$ et $x = 6$.

EXERCICE 3 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $p(C) = 0,60$;
   $p_{\overline{C}}(H) = \dfrac{2}{3}$ et $p_{\overline{C}}(B) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.
2. 

3. $p(H) = p(C \cap H) + p\left(\overline{C} \cap H\right) = 0,6 \times \frac{2}{3} + 0,4 \times \frac{1}{4} = 0,4 + 0,1 = 0,5$.
4. On calcule $p(C \cap H) + p\left(\overline{C} \cap B\right) = 0,4 + 0,4 \times \frac{3}{4} = 0,4 + 0,3 = 0,7$.
5. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 1 - 0,7 = 0,3$ probabilité de sortir de son véhicule.
   La probabilité qu'aucun des trois ne sortent du véhicule est $0,7^3 = 0,343$.
   Donc la probabilité qu'au moins l'un des conducteurs soit contraint de descendre de son véhicule pour saisir son ticket est égale à $1 - 0,343 = 0,657$.

EXERCICE 3 **5 points**
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** La probabilité que Franck joue le deuxième jour est 0,9.
   b. La probabilité qu'il ne joue pas le deuxième jour est 0,1.
2. **a.**


b. La matrice de transition M associée à ce graphe est $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$.

3. a. $P_2 = P_1 \times M = (0 \quad 1) \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} = (0,9 \quad 0,1)$.

b. $P_{n+1} = P_n \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} d_{n+1} & e_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n & e_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix} \iff$

$\begin{cases} d_{n+1} & = & 0,4d_n + 0,9e_n \\ e_{n+1} & = & 0,6d_n + 0,1e_n \end{cases}$

c. En particulier donc :

$\begin{cases} d_{n+1} & = & 0,4d_n + 0,9e_n \\ d_n + e_n & = & 1 \end{cases} \Rightarrow d_{n+1} = 0,4d_n + 0,9(1 - d_n) \iff d_{n+1} = -0,5d_n + 0,9.$

4. a. On a donc $u_{n+1} = d_{n+1} - 0,6 = -0,5d_n + 0,9 - 0,6 = -0,5d_n + 0,3 = -0,5(d_n - 0,6) = -0,5u_n$.

$u_{n+1} = -0,5u_n$ signifie que la suite u est une suite géométrique de raison $-0,5$ de premier terme $u_1 = -0,6$.

b. On sait qu'alors pour tout naturel supérieur à zéro :

$u_n = -0,6 \times (-0,5)^{n-1} = \dfrac{-0,6}{-0,5} \times (-0,5) \times (-0,5)^{n-1} = 1,2 \times (-0,5)^n$.

Or $u_n = d_n - 0,6 \iff d_n = u_n + 0,6 = 1,2 \times (-0,5)^n$.

c. Comme $-1 < -0,5 < 0$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,5)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0,6$.

À terme la probabilité que Franck joue est égale à 0,6.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A - Modélisation par une fonction affine

1. La calculatrice donne avec des coefficients au centième près
$q = -0,87t + 9,44$
2. Voir sur l'annexe.
3. Avec $x = 12$, on obtient $q = 9,44 - 0,87 \times 12 = 9,44 - 10,44 = -1$.
Ce résultat est stupide, donc si ce modèle est correct au bout de 12 heures la quantité de médicament dans le corps est nulle.

Partie B - Autre modélisation

1. Voir l'annexe.

2. a. La calculatrice donne $y = -0,067t + 1$.

b. Ob a $y = -0,067t + 1 = \dfrac{\ln(q)}{\ln(10)} \iff \ln q = \ln 10 \times (-0,067t + 1) \iff q = \mathrm{e}^{\ln 10 \times (-0,067t+1)} \iff$
$q = \mathrm{e}^{\ln 10 \times (-0,067t) + \ln 10} \iff q = \mathrm{e}^{\ln 10} \times \mathrm{e}^{\ln 10 \times (-0,067t)} \iff q = 10\mathrm{e}^{\ln 10 \times (-0,067t)}$.

Or $\ln 10 \times (-0,067) \approx 0,15$, donc finalement :

$$q = 10\mathrm{e}^{-0,15t}.$$

3. a. La fonction $t \longmapsto -0,15t$ est décroissante et la fonction $u \longmapsto \mathrm{e}^u$ est croissante, donc la composée est décroissante sur $[0\,;\,12]$.

On peut aussi calculer $f'(t) = 10 \times (-0,15)\mathrm{e}^{-0,15t} = -1,5\mathrm{e}^{-0,15t} < 0$: la dérivée est négative, la fonction est donc décroissante sur $[0\,;\,12]$.

b. On a $q(12) = f(12) = 10\text{e}^{-0,15\times12} = 10\text{e}^{-1,8} \approx 1,7$.

c. Si l'on pense qu'il reste encore du médicament dans le corps au bout de douze heures le deuxième modèle exponentiel est le plus adapté.

Partie C - Valeur moyenne

1. $F'(t) = -\dfrac{200}{3} \times (-0,15)\text{e}^{-0,15t} = 10\text{e}^{-0,15t} = f(t)$: F est donc une primitive de f sur $[0\,;\,12]$.

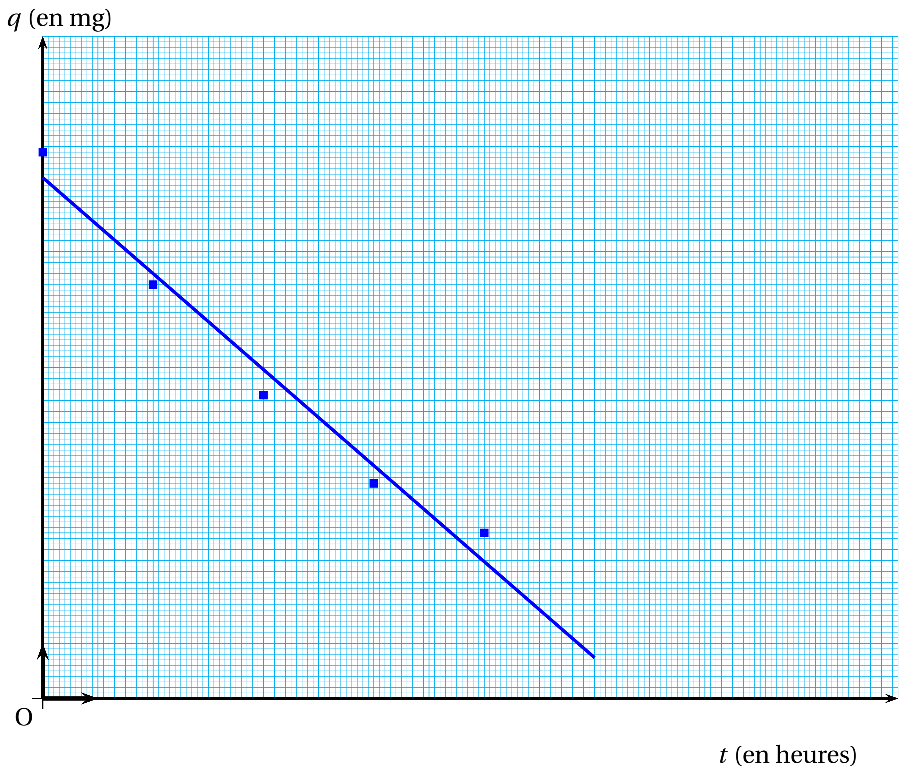
2. $I = \displaystyle\int_0^{10} f(t)\,\text{d}t = [F(t)]_0^{10} = F(10) - F(0) = -\dfrac{200}{3}\text{e}^{-0,15\times10} + \dfrac{200}{3}\text{e}^{-0,15\times0} = \dfrac{200}{3} - \dfrac{200}{3}\text{e}^{-1,5} = \dfrac{200}{3}\left(1-\text{e}^{-1,5}\right) \approx 51,79$.

3. La valeur moyenne m de médicament dans le sang dans les 10 heures suivant l'injection est égale à :

$$m = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} f(t)\,\text{d}t = \frac{1}{10} \times \frac{200}{3}\left(1-\text{e}^{-1,5}\right) = \frac{20}{3}\left(1-\text{e}^{-1,5}\right) \approx 5,2 \text{ mg}.$$

Annexe de l'exercice 4

Partie A



Partie B

t_i (en heures)	0	2	4	6	8
y_i (au centième près)	1	0,88	0,74	0,59	0,48