Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2010

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
Le sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On se propose d'étudier l'évolution des productions d'électricité d'origines hydraulique et éolienne depuis 1999.
Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : Production d'électricité d'origine hydraulique

Le tableau suivant donne la production d'électricité d'origine hydraulique en France pour plusieurs années entre 2000 et 2005.

Année	2000	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année x_i :	0	2	3	4	5
Production en GWh y_i :	71 593	65 826	64 472	65 393	57 271

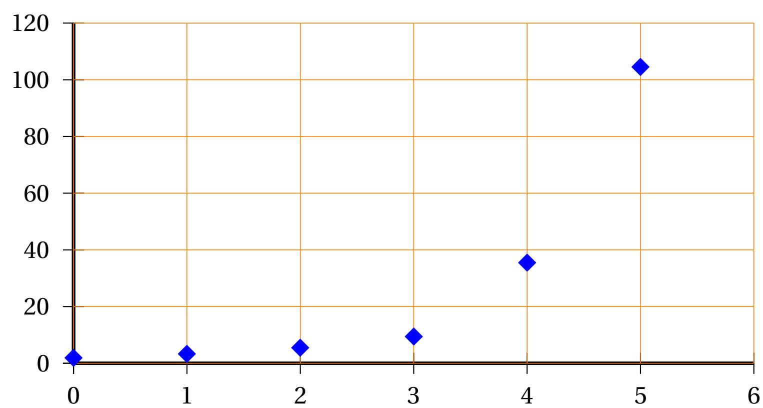
1. Représenter, dans le plan muni d'un repère orthogonal, le nuage de points associés à la série statistique $(x_i ; y_i)$ définie ci-dessus.
   On utilisera une feuille de papier millimétré et on choisira comme unités graphiques 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 10 000 GWh sur l'axe des ordonnées. On débutera la graduation sur l'axe des ordonnées à 50 000.
2. L'allure du nuage de points permet d'envisager un ajustement affine.
   a. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'équation $y = mx + p$ de la droite d d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés, les coefficients m et p seront arrondis au dixième.
   b. Placer le point G et tracer la droite d sur le graphique précédent.

Partie B : Production d'électricité d'origine éolienne

Le tableau suivant donne la capacité de production d'électricité d'origine éolienne installée enFrance de 2003 à 2008.

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année x_i :	0	1	2	3	4	5
Puissance installée en MWh y_i :	1,9	3,3	5,5	9,4	35,5	104,5

1. Ces données sont représentées par le nuage de points ci-après :



On considère qu'un ajustement affine n'est pas pertinent.

L'allure du nuage suggère de rechercher un ajustement exponentiel de y en x. Pour cela on pose pour tout entier naturel i compris entre 0 et 5 :

$$z_i = \ln\left(\frac{y_i}{100}\right)$$

Dans les questions a et b suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice. Aucune justification n'est demandée. Les résultats seront arrondis au centième.

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Puissance installée : y_i	1,9	3,3	5,5	9,4	35,5	104,5
$z_i = \ln\left(\frac{y_i}{100}\right)$						

b. Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés.

c. Sachant que $z = \ln\left(\frac{y}{100}\right)$, déterminer l'expression de y sous la forme $k\mathrm{e}^{ax}$ où k et a sont des nombres réels à calculer.

2. On suppose que l'évolution de la puissance installée se poursuit dans un avenir proche selon le modèle précédent.

Estimer, au centième de MWh près, la puissance installée prévue pour l'année 2010.

Exercice 2 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées, une seule réponse est exacte.

Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.

Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1. f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 0]$ par $f(x) = x^2$. Sa valeur moyenne sur l'intervalle $[-3\ ;\ 0]$ est :

- $\mu = 4,5$
- $\mu = 3$
- $\mu = \frac{1}{3}$
- $\mu = -3$

2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$, f' désigne sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

Alors :

- $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$
- $f'(x) = \dfrac{1}{2x + 1}$
- $f'(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$
- $f'(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$

3. La primitive F de la fonction f définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\ ;\ +\infty[$ par

$f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x}$ telle que $F(1) = 1$ vérifie :

- $F(x) = \dfrac{\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x}{\frac{1}{2}x^2} - \dfrac{17}{3}$
- $F(x) = x^2 - 1 + 3\ln x$
- $F(x) = x^2 - x + 3\ln x + 1$
- $F(x) = 2 - \dfrac{3}{x^2} + 1$

4. f est la fonction définie sur l'intervalle $I =]0~;~+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5}{x}$, on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère donné du plan. L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ est égale à :

   - $5\ln 2$
   - $\ln 10 - \ln 5$
   - $3,466$
   - $\ln\left(\dfrac{2}{5}\right) - \ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$

5. La limite de la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0~;~+\infty[$ par $f(x) = x^2 - x - \ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$ est :

   - $-\infty$
   - 0
   - e
   - $+\infty$

EXERCICE 2 — 5 points

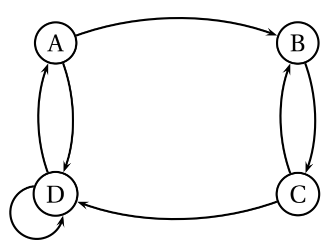
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées, une seule réponse est exacte.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.
Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1. Les points A $(1~;~2~;~3)$, B$(3~;~2~;~1)$ et C$(1~;~1~;~1)$ sont trois points de l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$. Le plan (ABC) est parallèle au plan P d'équation :
   - $x + y - z = 0$
   - $y = \dfrac{1}{2}$
   - $x + y + z - 1 = 0$
   - $x - 2y + z + 3 = 0$

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n}{1 + n}$. Cette suite :
   - a pour limite $\dfrac{1}{n}$
   - a pour limite 0
   - a pour limite 1
   - n'a pas de limite

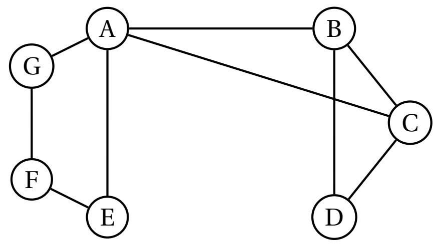
3. Le graphe ci-contre admet exactement n chaînes de longueur 4 allant de A vers B avec :
   - $n = 1$
   - $n = 3$
   - $n = 5$
   - $n = 8$



4. La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{4n + 3}{n + 1}$:
   - n'est pas monotone
   - n'admet pas de limite
   - est croissante
   - est majorée par 0

5. Le graphe ci-dessous a un nombre chromatique κ égal à :

- 2
- 3
- 4
- 5



EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, on appellera motard tout conducteur d'une moto dont la cylindrée est supérieure à 50 cm^3. Ces motards se décomposent en deux catégories :

— la catégorie A définie par le fait que les motards conduisent une moto de cylindrée 125 cm^3 ou plus,

— la catégorie B définie par le fait que les motards conduisent une moto d'une cylindrée strictement inférieure à 125 cm^3.

La moto peut être de type *sportive* ou *routière*.

On considère que :

- ceux de la catégorie A représentent 44 % de l'ensemble des motards
- 65 % de ceux de la catégorie B possèdent une moto de type sportive.

On interroge au hasard un motard et on note :

A : l'évènement « le motard est de la catégorie A »,
B : l'évènement « le motard est de la catégorie B »,
S : l'évènement « la moto est de type sportive »,
R : l'évènement « la moto est de type routière ».

Tous les résultats des différents calculs seront donnés sous forme décimale et arrondis au millième. On pourra utiliser un arbre de probabilité ou un tableau.

1. Montrer que la probabilité que le motard interrogé soit dans la catégorie B et conduise une moto de type routière est égale à $0,196$.

2. 36,6 % des motos sont de type routière.

Quelle est la probabilité que le motard choisi conduise une moto de type sportive et soit dans la catégorie A ?

3. Quelle est la probabilité qu'un motard soit dans la catégorie B sachant qu'il conduit une moto de type routière ?

4. On choisit au hasard et de façon indépendante trois motards. Quelle est la probabilité qu'au moins un d'entre eux soit de la catégorie B ?

EXERCICE 4 **6 points**

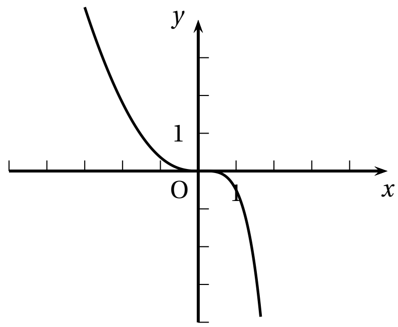
Commun à tous les candidats

On considère la fonction numérique f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x^2\mathrm{e}^{x-1}.$$

On note f' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthogonal.



1. Quelle conjecture pourrait-on faire concernant le sens de variation de f sur l'intervalle $[-3 ; 2]$ en observant cette courbe ?

   Dans la suite du problème, on va s'intéresser à la validité de cette conjecture.

2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = xg(x)$ où $g(x) = 1-(x+2)\text{e}^{x-1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

   Pour la suite, on admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.
3. Étude du signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
   a. Calculer les limites respectives de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$.

   On pourra utiliser sans la démontrer l'égalité : $g(x) = 1 - \dfrac{x\text{e}^x + 2\text{e}^x}{\text{e}}$.

   b. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs du nombre réel x.

   c. En déduire le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variation en y reportant les limites déterminées précédemment.

   d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Justifier que $0,20 < \alpha < 0,21$.

   e. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Sens de variation de la fonction f

   a. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

   b. En déduire le sens de variation de la fonction f

   c. Que pensez-vous de la conjecture de la question 1 ?