Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2010

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : Production d'électricité d'origine hydraulique

1. Voir à la fin.
2. L'allure du nuage de points permet d'envisager un ajustement affine.
   a. On a G(2,8 ; 64911) La calculatrice donne $y = -2416,1x + 71676,2$ (coefficients au dixième près).
   b. Voir à la fin.

Partie B : Production d'électricité d'origine éolienne

1. **a.** Recopier et compléter le tableau suivant :

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Puissance installée : y_i	1,9	3,3	5,5	9,4	35,5	104,5
$z_i = \ln\left(\dfrac{y_i}{100}\right)$	$-3,96$	$-3,41$	$-2,9$	$-2,36$	$-1,04$	0,04

   b. La calculatrice permet d'obtenir $z = 0,79x - 4,25$. (coefficients arrondis au centième)
   c. On a si $y > 0$, $z = \ln\left(\dfrac{y}{100}\right) = 0,79x - 4,25 \iff$
   $\dfrac{y}{100} = \text{e}^z \iff y = 100\text{e}^z = 100\text{e}^{0,79x-4,25}$.
   Soit $y = 100\text{e}^{0,79x} \times \text{e}^{-4,25}$.
   Comme $\text{e}^{-4,25} \approx 0,0143$, on obtient finalement $y = 1,43\text{e}^{0,79x}$.
2. 2010 correspond à $x = 7$, soit une puissance $y = 1,43\text{e}^{0,79\times 7} = 1,43\text{e}^{3,55} \approx 360,566$.
   Avec ce modèle exponentiel la puissance installée en 2010 devrait être au centième près 360,57 MWh.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. La valeur moyenne sur l'intervalle $[-3 ; 0]$ de la fonction f est :
   $$m = \frac{1}{0-(-3)}\int_{-3}^{0} x^2\,\text{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{0} = \frac{1}{3}\left[0 - \left(-\frac{27}{3}\right)\right] = \frac{1}{3} \times \frac{27}{3} = 3.$$
2. On a $f(x) = \ln u$, avec $u(x) = x^2 + x + 1$. On sait que $f'(x) = \dfrac{u'}{u} = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.
3. On peut écrire sur $]0 ; +\infty[$, $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{3}{x}$, d'où en prenant une primitive de chacun de ces trois termes :
   $F(x) = x^2 - x + 3\ln x + K$, avec $K \in \mathbb{R}$.
   Comme $F(1) = 1 \iff 1^2 - 1 + 3\ln 1 + K = 1 \iff K = 1$.
   Finalement $F(x) = x^2 - x + 3\ln x + 1$.

4. La fonction est positive sur l'intervalle $[1\,;\,2]$, donc l'aire demandée en unité d'aire est égale à l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x = [5\ln x]_1^2 = 5\ln 2 - 5\ln 1 = 5\ln 2$.

5. On a car $x > 0 \quad f(x) = x\left(x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, on a

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Un plan parallèle au plan d'équation $x-2y+z+3 = 0$ a une équation de la forme $x-2y+z+k = 0$

Les coordonnées de A donnent : $1-4+3+k = 0 \iff k = 0$;

Les coordonnées de B donnent : $3-4+1+k = 0 \iff k = 0$;

Les coordonnées de C donnent : $1-2+1+k = 0 \iff k = 0$;

Le plan (ABC) a pour équation $x-2y+z = 0$: il est parallèle au plan d'équation $x-2y+z+3 = 0$.

2. On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$;

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1+n = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. La matrice de transition associée au graphe est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $M^4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

On trouve le nombre de chaînes de longueur 4 allant de A vers B à la première ligne et à la deuxième colonne. On a donc $n = 1$.

4.
- $v_0 = 3,\ v_1 = 3{,}5,\ v_2 = \dfrac{11}{3} \approx 3{,}3$: elle n'est pas monotone.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 4$;
- $v_0 = 3$ donc la suite n'est pas majorée par 0.

Il reste : la suite est croissante :

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{4(n+1)+3}{n+1+1} - \dfrac{4n+3}{n+1} = \dfrac{4n+7}{n+2} - \dfrac{4n+3}{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$: la suite est bien croissante.

5. Le sous-graphe A-B-C est complet donc le nombre chromatique est supérieur ou égal à 3.

Une coloration de ce graphe avec trois couleurs est possible, donc le nombre chromatique est égal à 3.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. On a $p(A) = 0{,}44$, donc $p(B) = 1 - 0{,}44 = 0{,}56$ et $p_B(S) = 0{,}65$, donc $p_B(R) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$.

On a donc $p(B\cap R) = p(B) \times p_B(R) = 0{,}56 \times 0{,}35 = 0{,}196$.

2. On a donc $p(R) = 0{,}366$, d'où $p(S) = 1 - 0{,}366 = 0{,}634$. Or $p(S) = p(A\cap S) + p(B\cap S) \iff p(A\cap S) = p(S) - p(B\cap S) = 0{,}634 - 0{,}56 \times 0{,}65 = 0{,}634 - 0{,}364 = 0{,}27$.

3. $p_R(B) = \dfrac{p(B \cap R)}{p(R)} = \dfrac{0,196}{0,366} \approx 0,536.$

4. On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = p(B) = 0,56$.
La probabilité qu'aucun des trois ne soit de la catégorie B est $(1 - 0,56)^3$, donc la probabilité qu'au moins un d'entre eux soit de la catégorie B est égale à :
$1 - 0,44^3 \approx 0,915$.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

1. D'après l'allure du graphe il semble que la fonction f est décroissante sur$\mathbb{R}$.

2. On a pour tout réel :
$f'(x) = 2 \times \dfrac{x}{2} - 2x\mathrm{e}^{x-1} - x^2 \times 1 \times \mathrm{e}^{x-1} = x - \mathrm{e}^{x-1}\left(2x + x^2\right) = x\left[1 - \mathrm{e}^{x-1}(2+x)\right]$

3. Étude du signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

a. On a $\mathrm{e}^{x-1} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-1}$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, par produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-1} = +\infty$.
D'autre part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -(x+2) = -\infty$ et enfin par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
On a $g(x) = 1 - x\mathrm{e}^{x-1} - 2\mathrm{e}^{x-1} = 1 - \mathrm{e}^{-1} \times \mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x$;
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et aussi $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, d'où par somme de limites : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

b. $g'(x) = -1 \times \mathrm{e}^{x-1} - (x+2) \times 1 \times \mathrm{e}^{x-1} = \mathrm{e}^{x-1}(-1 - x - 2) = (-x-3)\mathrm{e}^{x-1}$.
Comme $\mathrm{e}^{x-1} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $g'(x)$ est celui de $-x-3$.
Donc si $x > -3$, $g'(x) < 0$.
Si $x < -3$, $g'(x) > 0$ la fonction g est croissante.

c. Du signe de la dérivée on en déduit que g est décroissante sur $]-3~;~+\infty[$ et croissante sur $]-\infty~;~-3[$. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$1+\mathrm{e}^{-4}$	$\searrow$	$-\infty$

d. Sur l'intervalle $]-3~;~+\infty[$, la fonction g est continue car dérivable, et décroit de $g(-3) > 1 > 0$ à moins l'infini. D'après le théorème de la valeur intermédiaire, g s'annule donc pour une valeur unique $\alpha \in]-3~;~+\infty[$.
La calculatrice donne :
$g(0) \approx 0,3$ et $g(1) = -2$, donc $0 < \alpha < 1$;
$g(0,2) \approx 0,01$ et $g(0,3) \approx -0,1$, donc $0,2 < \alpha < 0,3$;
$g(0,20) \approx 0,01$ et $g(0,21) \approx -0,003$, donc $0,20 < \alpha < 0,21$.

e. D'après le tableau de variations précédent :
$g(x) > 0$ sur $]-\infty~;~\alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha~;~+\infty[$.

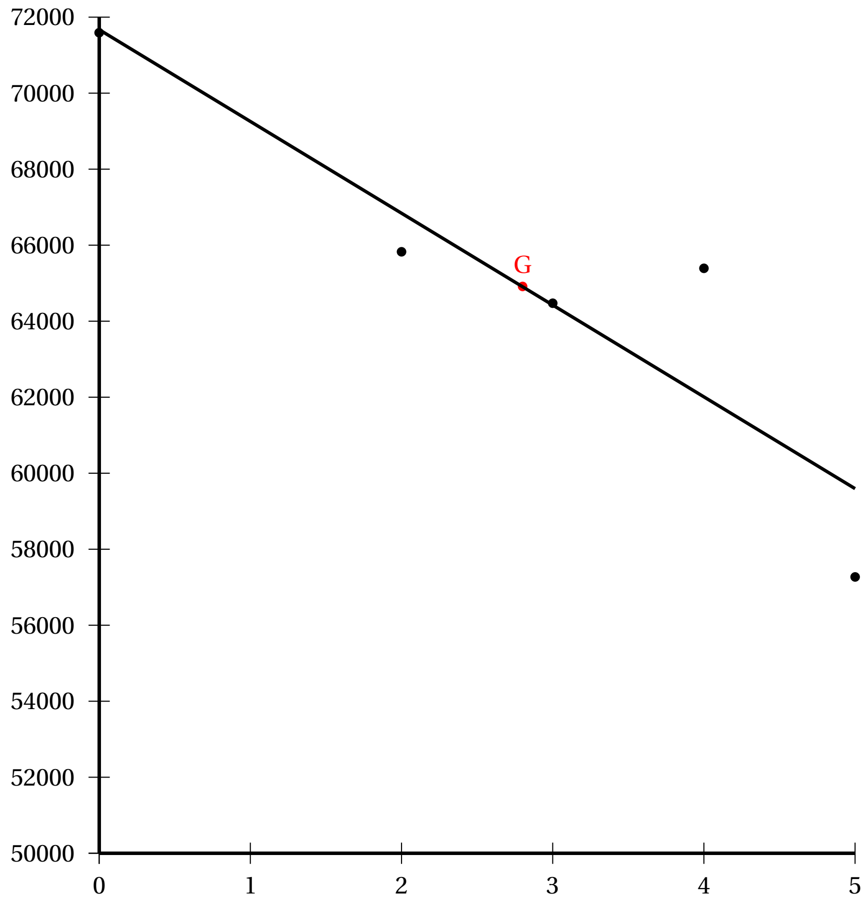
4. Sens de variation de la fonction f

a. Le signe de $f'(x)$ dépend de celui de x et de $g(x)$:
- si $x \in]-\infty~;~0[$, $f'(x) < 0$;
- si $x \in]0~;~\alpha[$, $f'(x) > 0$:
- si $x \in]\alpha~;~+\infty[$, $f'(x) < 0$

b. D'après la question précédente :
f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, mais est croissante sur $]0\,;\,\alpha[$.

c. La conjecture de la question 1 était donc erronée.
En fait $f(0) = 0$ et $f(0,2) \approx 0,002$ donc graphiquement la croissance est imperceptible.

Exercice 1


72000
70000
68000
66000
64000
62000
60000
58000
56000
54000
52000
50000
0
1
2
3
4
5
G