

## 🌀 Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2009 🌀

L'annexe est à rendre avec la copie.  
L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.  
Le sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

### EXERCICE 1

3 points

#### Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

*Le barème sera établi comme suit : pour une réponse exacte, 0,5 point ; pour une réponse fautive ou l'absence de réponse, 0 point.*

1. Un véhicule coûte 15 000 € en 2008. Il se déprécie de 10 % par an (c'est-à-dire que son prix de revente baisse de 10 % par an). Sa valeur à la vente au bout de cinq ans sera de :

• 7 500 €                      • 8 857,35 €                      • 5 000 €

2. Soit  $u$  une fonction strictement positive sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$  alors :

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[u(x)] = +\infty$     •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[u(x)] = -\infty$     •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[u(x)] = 0$

3. Voici la loi de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  :

$x_i$	-10	0	10
$p_i$	0,2	0,3	0,5

- l'espérance mathématique de cette variable est 3
- l'espérance mathématique de cette variable est -3
- l'espérance mathématique de cette variable est 0

4. Pour tout  $a > 0$ ,  $\ln 3a - \ln a$  est égale à :

•  $\ln 3$                       •  $\ln(2a)$                       •  $2 \ln a$

5.  $\int_0^1 e^{2x+1} dx$  est égale à :

•  $e^3 - 1$                       •  $2e^3 - 2e$                       •  $\frac{e^3 - e}{2}$

6. Pour tout réel  $x$ ,  $e^{4+2x}$  est égale à :

•  $(e^2)^{2x}$                       •  $(e^{x+2})^2$                       •  $e^4 + e^{2x}$

### EXERCICE 2

5 points

#### Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à  $10^{-3}$  près.  
Une étude sur le taux d'équipement en téléphonie des ménages d'une ville a permis d'établir les résultats suivants :

- 90 % des ménages possèdent un téléphone fixe ;

- parmi les ménages ne possédant pas de téléphone fixe, 87 % ont un téléphone portable ;
- 80 % des ménages possèdent à la fois un téléphone fixe et un téléphone portable.

Notations : Si  $A$  et  $B$  sont des évènements,  $\bar{A}$  désigne l'évènement contraire de  $A$  et  $P_B(A)$  la probabilité que l'évènement  $A$  soit réalisé sachant que l'évènement  $B$  l'est.

On choisit un ménage au hasard et on note :

- $F$  l'évènement : « le ménage possède un téléphone fixe » ;
- $T$  l'évènement : « le ménage possède un téléphone portable ».

1. **a.** Grâce aux données de l'énoncé, donner  $P(F \cap T)$ ,  $P(F)$  et  $P_{\bar{F}}(T)$ .  
**b.** Calculer  $P_F(T)$ .
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement  $T$  est 0,887.
3. Sachant que le ménage choisi n'a pas de téléphone portable, quelle est la probabilité que ce soit un ménage possédant un téléphone fixe ?
4. On choisit successivement au hasard et de manière indépendante trois ménages.  
Quelle est la probabilité qu'il y en ait au plus deux ayant un téléphone portable ?

### EXERCICE 2

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 4}{3}$ .

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unités graphiques : 2 cm).  
Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x + 4}{3}$ .  
**a.** Tracer la représentation graphique  $d$  de la fonction  $f$  ainsi que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .  
**b.** En utilisant  $d$  et  $\Delta$ , construire  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .  
**c.** Conjecturer  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  à l'aide de la construction, que l'on peut imaginer, d'un grand nombre de termes de la suite  $(u_n)$ .
3. On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = u_n - 4$ .  
**a.** Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.  
**b.** Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  et en déduire que  $u_n = 4 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .  
**c.** Quelle est la limite de la suite  $(u_n)$  ?

### EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne le chiffre d'affaires, exprimé en milliers d'euros, réalisé par une chaîne commerciale :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année $x_i$	0	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires en milliers d'euros $y_i$	55	58	64	85	105	112

**Partie 1**

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i ; y_i)$  dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités : 2 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 10 milliers d'euros en ordonnée.
2. Calculer les coordonnées du point moyen  $G(x ; y)$  et le placer sur la figure précédente.

On décide d'effectuer deux ajustements successifs en vue de faire des prévisions.

**Partie 2**

1. a. Déterminer à l'aide de la calculatrice une équation de la droite de régression  $D$  de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients à  $10^{-1}$  près.  
b. Tracer cette droite sur le graphique de la partie 1.
2. En supposant que l'évolution constatée se maintienne, estimer le chiffre d'affaires réalisé en 2011 (on précisera la méthode utilisée).

**Partie 3**

On décide d'ajuster le nuage de points de la partie 1 par la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentant, dans le repère déjà défini, une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = ab^x$ , où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels strictement positifs.

1. On impose à la courbe représentative de la fonction  $f$  de passer par les points  $A(0 ; 55)$  et  $B(5 ; 112)$ .  
Calculer les valeurs exactes de  $a$  et  $b$  telles que la fonction  $f$  vérifie cette condition, puis donner la valeur approchée arrondie à  $10^{-2}$  près de  $b$ .
2. Pour la suite, on considérera que  $f(x) = 55 \times 1,15^x$  pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .  
Estimer grâce à ce nouvel ajustement le chiffre d'affaires, en milliers d'euros, réalisé en 2011 (on arrondira le résultat au centième).

**Partie 4**

**Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**

Estimer en quelle année le chiffre d'affaires aura dépassé pour la première fois 300 milliers d'euros, en utilisant successivement les ajustements affine et exponentiel des parties 2 et 3.

**EXERCICE 4****7 points****Commun à tous les candidats**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies et dérivables sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  telles que pour tout réel  $x$  de cet intervalle :

$$f(x) = (x - e)(\ln x - 1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln x - \frac{e}{x}$$

La courbe représentative de la fonction  $g$  dans un repère du plan est donnée en annexe et l'unité graphique est 2 cm.

**Partie 1**

1. Démontrer que la fonction  $g$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
2. Calculer  $g(e)$  et, grâce à la question 1, donner le signe de  $g(x)$  pour tout  $x$  strictement positif.

**Partie 2**

1. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
2. On note  $f'$  la dérivée de  $f$  Démontrer que  $f'(x) = g(x)$  pour tout nombre réel  $x$  strictement positif.
3. Établir le tableau des variations de la fonction  $f$ .  
(On y fera figurer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ ).
4. Représenter graphiquement la fonction  $f$  sur la feuille annexe jointe au sujet.

**Partie 3**

Soit  $F$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  telle que pour tout réel  $x$  de cet intervalle :

$$F(x) = \left( \frac{x^2}{2} - ex \right) \ln x + 2ex - \frac{3}{4}x^2$$

1. Démontrer que la fonction  $F$  est une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
2. On considère le domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}_f$  l'axe des abscisses, les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .
  - a. Hachurer ce domaine sur le dessin.
  - b. Calculer la valeur exacte de  $\int_1^e f(x) dx$ .
  - c. En déduire une valeur approchée arrondie au centième de l'aire du domaine exprimée en  $\text{cm}^2$ .

## Annexe à compléter et à rendre avec la copie

## Exercice 4

