∽ Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Sud ∾ novembre 2009

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. Au bout de 5 ans son prix de revente est égal à : $15000 \times 0,9^5 = 8857,35$ €.
2. Par composition de limites : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \ln[u(x)] = -\infty$
3. $E = -10 \times 0,2 + 0 \times 0,3 + 10 \times 0,5 = -2 + 5 = 3$.
4. $\ln 3a - \ln a = \ln\left(\dfrac{3a}{a}\right) = \ln 3$ car $a \neq 0$.
5. Une primitive de $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x+1}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1}$, donc
$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2+1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\times 0+1} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{e} = \frac{\mathrm{e}^3 - \mathrm{e}}{2}$.
6. $\mathrm{e}^{4+2x} = \mathrm{e}^4 \times \mathrm{e}^{2x} = \left(\mathrm{e}^2\right)^2 \times \left(\mathrm{e}^x\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{2+x}\right)^2 = \left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2$

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a (dernière information) $P(\mathrm{F} \cap \mathrm{T}) = 0,8$;
$P(\mathrm{F}) = 0,9$ et $P_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{T}) = 0,87$.

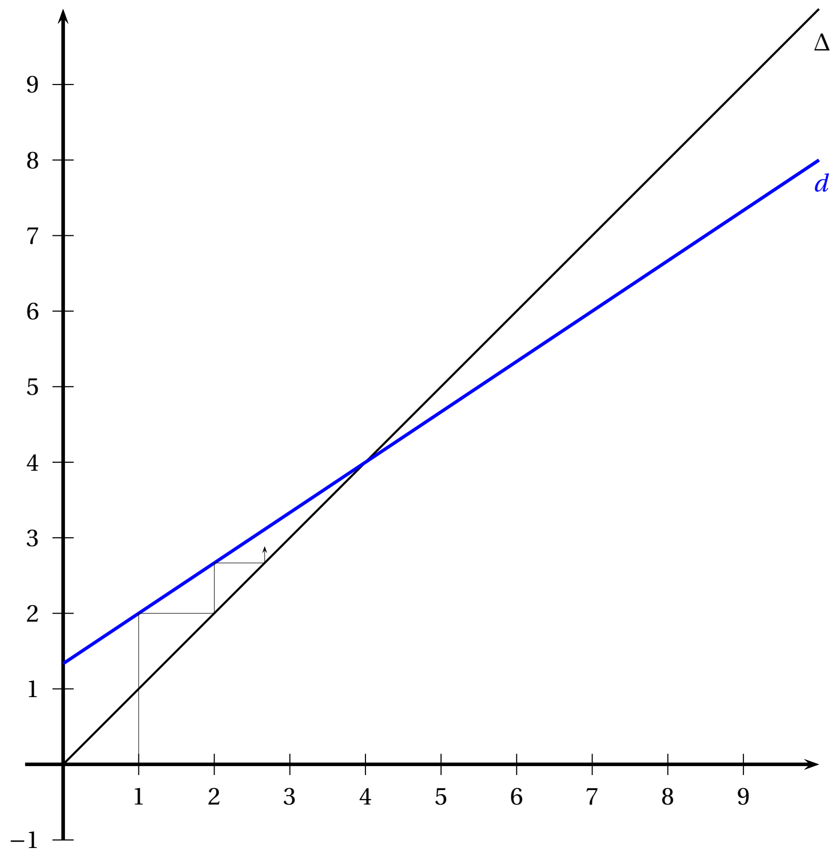
   b. $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{T}) = \dfrac{P(\mathrm{F} \cap \mathrm{T})}{P(\mathrm{F})} = \dfrac{0,8}{0,9} = \dfrac{8}{9} \approx 0,889$.
2. On d'après la loi des probabilités totales :
$P(\mathrm{T}) = P(\mathrm{F} \cap \mathrm{T}) + P\left(\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{T}\right)$.
$P\left(\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{T}\right) = P\left(\overline{\mathrm{F}}\right) \times P_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{T}) = (1 - 0,9) \times 0,87 = 0,087$, d'où :
$P(\mathrm{T}) = 0,8 + 0,087 = 0,887$.
3. Il faut trouver $P_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{F}) = \dfrac{P\left(\overline{\mathrm{T}} \cap \mathrm{F}\right)}{P\left(\overline{\mathrm{T}}\right)}$.
D'après la loi des probabilités totales :
$P(\mathrm{F}) = P(\mathrm{F} \cap \mathrm{T}) + P\left(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{T}}\right)$ d'où
$P\left(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{T}}\right) = P(\mathrm{F}) - P(\mathrm{F} \cap \mathrm{T}) = 0,9 - 0,8 = 0,1$.
De plus $P\left(\overline{\mathrm{T}}\right) = 1 - P(\mathrm{T}) = 1 - 0,887 = 0,113$.
Finalement $P_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{F}) = \dfrac{0,1}{0,113} \approx 0,885$.
4. On a un e épreuve de Bernoulli avec $n = 3$ et $P = P(\mathrm{T}) = 0,887$.
La probabilité que les trois aient un téléphone portable est $0,887^3$, donc la probabilité qu'il y en ait au plus deux ayant un téléphone portable est :
$1 - 0,887^3 \approx 0,3021$, soit au millième près 0,302.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. $u_0 = 1,\ u_1 = \dfrac{2u_1 + 4}{3} = \dfrac{2 \times 1 + 4}{3} = 2$;
$u_2 = \dfrac{2u_1 + 4}{3} = \dfrac{2 \times 2 + 4}{3}\dfrac{8}{3}$;
$u_3 = \dfrac{2u_2 + 4}{3} = \dfrac{2 \times \frac{8}{3} + 4}{3} = \dfrac{\frac{26}{3}}{3} = \frac{26}{9}$.

2. **a.**



b. Voir la figure ci-dessus.

c. On conjecture que la suite a pour limite l'abscisse du point commun à d et à Δ, soit le nombre 4.

3. **a.** Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \dfrac{2u_n + 4}{3} - 4 = \dfrac{2u_n + 4 - 12}{3} = \dfrac{2u_n - 8}{3} = \dfrac{2}{3}(u_n - 4) = \dfrac{2}{3}v_n$.

Ce résultat montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$.

b. On sait que pour tout entier naturel n, $v_n = -3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Or $v_n = u_n - 4 \iff u_n = v_n + 4 = 4 - 3 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

c. Comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ et finalement :

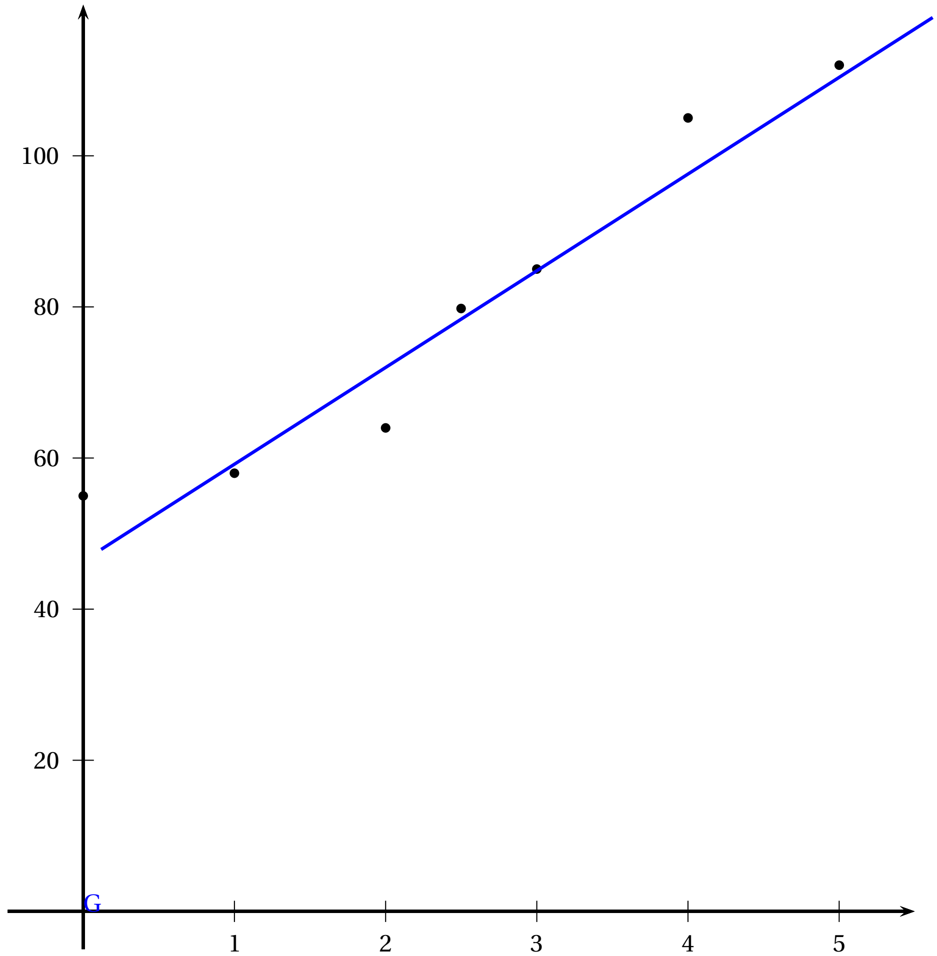
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 4$ ce qui était la conjecture.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie 1

1.



2. On a $G\left(2,5\,;\,\dfrac{479}{6}\right)$ soit à peu près G(2,5 ; 79,8).

On décide d'effectuer deux ajustements successifs en vue de faire des prévisions.

Partie 2

1. **a.** La calculatrice donne après arrondi des coefficients au dixième :
$y = 12,8x + 47,9$.

b. Voir ci-dessus.

2. 2011 correspond au rang $x = 10$, d'où $y = 12,8 \times 10 + 47,9 = 128 + 47,9 = 175,9$ milliers d'euros.

Partie 3

1. a et b doivent être solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} ab^0 & = & 55 \\ ab^5 & = & 112 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 55 \\ ab^5 & = & 112 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 55 \\ 55b^5 & = & 112 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 55 \\ b^5 & = & \frac{112}{55} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 55 \\ b & = & \left(\frac{112}{55}\right)^{\frac{1}{5}} \end{array}\right.$$

2. On a $\left(\frac{112}{55}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,152$ ou en arrondissant au centième $b \approx 1,15$.
Avec cet ajustement en 2011 soit au rang $x = 10$, on aura un chiffre d'affaires de :
$55 \times 1,15^{10} \approx 222,506$ soit au centième près 222,51 milliers d'euros.

Partie 4

- Avec l'ajustement affine il faut trouver le plus naturel n tel que :

$12,8n + 47,9 \geqslant 300 \iff 12,8n \geqslant 252,1 \iff n \geqslant \dfrac{252,1}{12,8}$.

Or $\dfrac{252,1}{12,8} \approx 19,7$. Il faut prendre $n = 20$,donc attendre 2021.

- Avec l'ajustement exponentiel il faut trouver le plus naturel n tel que :

$55 \times 1,15^n \geqslant 300 \iff 1,15^n \geqslant \dfrac{300}{55} \iff n \ln 1,15 \geqslant \ln\left(\dfrac{300}{55}\right) \iff n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{300}{55}\right)}{\ln 1,15}$.

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{300}{55}\right)}{\ln 1,15} \approx 12,1$.

Il faut prendre $n = 13$, donc attendre 2014 seulement.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie 1

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x} \times (-\mathrm{e})$ est croissante et comme la fonction $x \longmapsto \ln x$ est croissante, g somme de deux fonctions croissantes est croissante sur $]0~;~+\infty[$.
2. On a $g(\mathrm{e}) = \ln \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 1 - 1 = 0$.

   Comme on a vu que g est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$, on a donc :
   - $g(x) < 0$ sur $[0~;~\mathrm{e}[$;
   - $g(\mathrm{e}) = 0$:
   - $g(x) > 0$ sur $]\mathrm{e}~;~+\infty[$.

Partie 2

1. On a $\lim\limits_{x \to 0} (x - \mathrm{e}) = -\mathrm{e}$et

   $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ d'où par produit de limites :

   $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

   D'autre part $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \mathrm{e}) = +\infty$ et

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x - 1 = +\infty$, d'où par produit dr limites :

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. On en dérivante produit :

   $f'(x) = (\ln x - 1) + (x - \mathrm{e}) \times \dfrac{1}{x} = \ln x - 1 + 1\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{x} = \ln x - \dfrac{\mathrm{e}}{x} = g(x)$.
3. On a vu au dessus le signe de $g(x)$, d'où on déduit les variations de f :
   - $f'(x) < 0$ sur $[0~;~\mathrm{e}[$: la fonction est décroissante sur cet intervalle ;
   - $f'(\mathrm{e}) = 0$: la fonction f a un minimum en $x = \mathrm{e}$: $f(\mathrm{e}) = 0$;
   - $f'(x) > 0$ sur $]\mathrm{e}~;~+\infty[$: la fonction f est croissante sur cet intervalle.

   D'où le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Voir à la fin.

Partie 3

1. On a $F'(x) = \left(\dfrac{2x}{2} - \text{e}\right)\ln x + \dfrac{1}{x} \times \left(\dfrac{x^2}{2} - \text{e}x\right) + 2\text{e} - 2 \times \dfrac{3}{4}x = x\ln x - \text{e}\ln x + \dfrac{x}{2} - \text{e} + 2\text{e} - \dfrac{3}{2}x = (x-\text{e})\ln x - x + \text{e} = (x-\text{e})\ln x - (x-\text{e}) = (x-\text{e})(\ln x - 1) = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $[0~:~+\infty[$.

2. **a.** Voir la figure.

b. Le tableau de variations de f montre qu'elle positive sur $[0~:~+\infty[$ et donne particulier sur $[1~;~\text{e}]$. Donc l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$ l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$ est égale à l'intégrale :

$\displaystyle\int_1^{\text{e}} f(x)\,\text{d}x = [F(x)]_1^{\text{e}} = f(\text{e}) - F(1) = \left(\dfrac{\text{e}^2}{2} - \text{ee}\right)\ln \text{e} + 2\text{ee} - \dfrac{3}{4}\text{e}^2 - \left[\left(\dfrac{1^2}{2} - \text{e}\right)\ln 1 + 2\text{e} - \dfrac{3}{4}1^2\right] = \dfrac{\text{e}^2}{2} - \text{e}^2 + 2\text{e}^2 - \dfrac{3}{4}\text{e}^2 - 2\text{e} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}\text{e}^2 - 2\text{e} + \dfrac{3}{4}$

c. La calculatrice donne une valeur approchée de l'aire du domaine soit 0,855 228 unité d'aire.

Comme cette unité d'aire est égale à $2 \times 2 = 4$ cm^2, l'aire du domaine est environ 3,428 soit au centième 3,43 cm^2.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 4