# ∽ Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2008 ∾

**EXERCICE 1** **4 points**
**Commun à tous les candidats**

**Première partie**

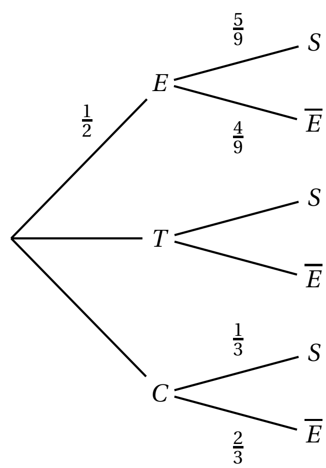
1. La tangente en $x = 3$ est horizontale donc $f'(3) = 0$.
2. Si $F$ est une primitive de $f$, alors $F'(x) = f(x)$. Un extremum de $F$ correspond à une annulation de sa dérivée donc de $f(x)$. Or $f$ s'annule en 0 et en 4,5; mais sur $[-1\ ;\ 4,5]$, $f(x) \geqslant 0$, donc la fonction $F$ est croissante et n'a pas d'extremum. Le seul extremum est donc en 4,5 et la fonction passant de plus à moins, donc $F$ est croissante puis décroissante : $F(4,5)$ est donc un maximum.

**Deuxième partie**

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x+1}{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{x}} = 3$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(\dfrac{3x+1}{x-2}\right) = \ln 3$.
Donc la droite d'équation $y = 9+\ln(3)$ est asymptote horizontale au voisinage de moins l'infini.
2. La première $h(x) = 9+\ln(3x+1)-\ln(x-2)$ est fausse : on aurait d'après celle-ci par exemple : $h(-1) = 9+\ln(-2)-\ln(-1)$, or $\ln(-2)$ n'existe pas.

**EXERCICE 2** **5 points**
**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. 




2. On a $p(E\cap S) = p(E)\times p_E(S) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{9} = \dfrac{5}{18}$.
3. D'après la formule des probabilités totales, les évènements $E$, $C$ et $T$ formant une partition de l'univers, on a :
$p(S) = p(E\cap S)+p(T\cap S)+p(C\cap S) \iff \dfrac{5}{9} = \dfrac{5}{18}+\dfrac{2}{9}+p(C\cap S) \iff p(C\cap S) = \dfrac{10-5-4}{18} = \dfrac{1}{18}$.
4. Donc $p(C\cap S) = \dfrac{1}{18} \iff p(C)\times p_C(S) = \dfrac{1}{18} \iff p(C) = \dfrac{\frac{1}{18}}{p_C(S)} = \dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{6}$.
5. Il faut trouver $p_S(T) = \dfrac{p(S\cap T)}{p(S)} = \dfrac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}} = \dfrac{2}{5}$.

**EXERCICE 2** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**Partie A**

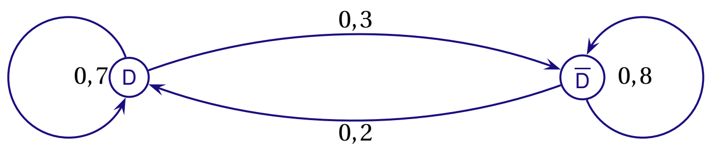
On utilise l'algorithme de Dijskra :

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 5, A | | 10, A | 6, A | | |
| B, 5 | | | 10, B | | | | |
| E, 6 | | | | 9, E | | 11, E | |
| D, 9 | | | 16, D | | | 10, D | 13, D |
| C, 10 | | | | | | | 13, C |
| F, 10 | | | | | | | 12, F |
| G, 12 | | | | | | | |

Le chemin comportant le moins d'obstacles est donc : A–E–D–F–G : 12 obstacles.

**Partie B**

**1.**




La matrice de transition est donc $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

**2.** Avec $P_n = \begin{pmatrix} a_n & 1 - a_n \end{pmatrix}$ matrice de l'état à l'étape $n$ ($n$-ème jour de travail avec la relation matricielle $P_{n+1} = P_n M$, on obtient :

$a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2(1 - a_n) = 0,5a_n + 0,2$.

**3. a.** Pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,4 = 0,5a_n + 0,2 - 0,4 = 0,a_n - 0,2 = 0,5(a_n - 0,4) = 0,5u_n$.
La relation $u_{n+1} = 0,5u_n$ montre que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,4 = 1 - 0,4 = 0,6$.

**b.** On a donc pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 \times 0,5^{n-1} = 0,6 \times 0,5^{n-1}$.
Or $u_n = a_n - 0,4 \iff a_n = u_n + 0,4$, donc $a_n = 0,4 + 0,6 \times 0,5^{n-1}$.

**EXERCICE 3** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

**1. a.** La calculatrice donne $y = 135x + 460$.

**b.** 2008 correspond au rang $x = 11$, d'où un estimation de la quantité d'aluminium recyclé : $y = 135 \times 11 + 460 = 1945$ (tonnes).

**2. a.** Si $t$ est ce pourcentage d'augmentation moyen de 2003 à 2005, on a :
$(1+t)^2 = \dfrac{1400}{1350} \iff 1 + t = \sqrt{\dfrac{1400}{1350}} \approx 1,0183$, d'où $t \approx 1,83 \approx 1,8\,\%$ au dixième près : le responsable a raison.

**b.** En partant de 2005, on obtiendra avec ce taux de 1,8 % en 2008 :
$1400 \times 1,018^3 \approx 1476,97 \approx 1477$.

**c.** Il faut trouver $n$ entier tel que :

$1400 \times 1,018^n > 1600 \iff 1,018^n > \dfrac{1600}{1400} \iff n\ln 1,018 > \ln\left(\dfrac{1600}{1400}\right) \iff$

$n\ln 1,018 > \ln\left(\dfrac{8}{7}\right) \iff n > \dfrac{\ln\left(\frac{8}{7}\right)}{\ln 1,018}$. Or $\dfrac{\ln\left(\frac{8}{7}\right)}{\ln 1,018} \approx 7,4$. Il faut prendre $n = 8$ donc attendre l'année 2013.

**3.** 2007 correspond au rang $x = 10$.

- Avec l'ajustement affine la prévision pour 2007 est de $135 \times 10 + 460 = 1350 + 460 = 1810$.
- Avec une augmentation annuelle de 1,8 % la prévision pour 2007 est de $1400 \times 1,018^2 \approx 1450,8 \approx 1450$.

Conclusion : l'augmentation annuelle de 1,8 % semble la plus vraisemblable.

**EXERCICE 4** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

**1.** On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -0,8x = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$.

Or $f(x) = 8x\mathrm{e}^{-0,8x} + 6\mathrm{e}^{-0,8x}$.

$8x\mathrm{e}^{-0,8x} = -10 \times (-0,8x)\mathrm{e}^{-0,8x} = -10X\mathrm{e}^X$ en posant $X = -0,8x$.

or on sait que $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X = 0$, donc $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} -10 \times (-0,8x)\mathrm{e}^{-0,8x} = 0$ d'où finalement par somme de limites :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Géométriquement ce résultat montre que l'axe des abscisses est asymptote à représentation graphique de la fonction $f$ au voisinage de plus l'infini.

**2.** La fonction est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = 8\mathrm{e}^{-0,8x} + (8x+6) \times (-0,8)\mathrm{e}^{-0,8x} = \mathrm{e}^{-0,8x}(8 - 6,4x - 4,8) =$

$(3,2 - 6,4x)\mathrm{e}^{-0,8x} = 3,2(1-2x)\mathrm{e}^{-0,8x}$.

Comme $3\mathrm{e}^{-0,8x} > 0$ quel que soit le réel $x$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2x$.

- $1 - 2x > 0 \iff 1 > 2x \iff x < \dfrac{1}{2}$, la dérivée est positive, la fonction $f$ est croissante de $f(0) = 6$ à $f\left(\frac{1}{2}\right) = (4+6)\mathrm{e}^{-0,4} = 10\mathrm{e}^{-0,4} \approx 6,7$.
- $1 - 2x < 0 \iff 1 < 2x \iff x > \dfrac{1}{2}$, la dérivée est négative, la fonction $f$ est décroissante de $f\left(\frac{1}{2}\right) = 10\mathrm{e}^{-0,4}$ à 0 (limite en plus l'infini.
- $1-2x = 0 \iff 1 = 2x \iff x = \dfrac{1}{2}$ : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 10\mathrm{e}^{-0,4}$ est le maximum de la fonction sur $[0 ; +\infty[$.

**3.** Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, la fonction $f$ est continue car dérivable, strictement décroissante d'environ 6,7 à 0 ; d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un réel $\alpha$ unique de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 1$.

La calculatrice donne :

$f(4) \approx 1,5$ et $f(5) \approx 0,8$, donc $4 < \alpha < 5$ ;

$f(4,7) \approx 1,02$ et $f(4,8) \approx 0,95$, donc $4,7 < \alpha < 4,8$.

**4.** $F$ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$F'(x) = -10\mathrm{e}^{-0,8x} - 10(x+2) \times (-0,8)\mathrm{e}^{-0,8x} = \mathrm{e}^{-0,8x}(-10 + 8x + 16) = (8x+6)\mathrm{e}^{-0,8x} = f(x)$ : donc $F$ est une primitive de $f$ sur $[0 ; +\infty[$.

**Partie B**

D'après la partie A, l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = t$ est égale au nombre de baladeurs vendus au bout de $t$ années.
Avec la calculatrice on peut dresser le tableau suivant avec
$B(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^t = -10(t+2)\mathrm{e}^{-0,8t} - \left[-10(0+2)\mathrm{e}^{-0,8\times 0}\right] = -10(t+2)\mathrm{e}^{-0,8t} + 20 =$
$10\left[2-(t+2)\mathrm{e}^{-0,8t}\right]$ :

| $t$ (années) | $B(t)$ | $B(t+1)-B(t)$ |
|---|---|---|
| 1 | 652 013 | 652 013 |
| 2 | 1 192 414 | 540 401 |
| 3 | 1 546 410 | 353 996 |
| 4 | 1 755 427 | 209 017 |
| 5 | 1 871 791 | 116 374 |
| 6 | 1 934 162 | 62 371 |

On constate donc que la sixième année le nombre de baladeurs vendus dans l'année va pour la première fois être inférieur à 100 000.
On peut remarquer que le nombre total de baladeurs produits va être inférieur à 2 millions limite de la fonction $B$ en plus l'infini.