Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Nord 4 juin 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{3x+6+1}{x+2} = \dfrac{‘3x+7}{x+2}$. FAUX
2. Pour $x = 0$, $f(0) = y = 3 + \dfrac{1}{2} = 3,5$. VRAI
3. On a $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$. FAUX
4. Une primitive de $x \longmapsto f(x) = 3 + \dfrac{1}{x+2}$ est la fonction $x \longmapsto F(x) = 3x + \ln(x+2)$. Donc :
$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = 3\times 2 + \ln(2+2) - [3\times 0 + \ln(0+2)] = 6 + \ln 4 - \ln 2 = 6 + \ln\dfrac{4}{2} = 6 + \ln 2$. FAUX
5. On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$. VRAI
6. $x > -2 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x+2} > 0 \Rightarrow 3 + \dfrac{1}{x+2} > 3$. VRAI
7. $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$, donc $f'(-1) = -\dfrac{1}{(-1+2)^2} = -1$. VRAI
8. On a de façon évidente $f'(x) < 0$ quel que soit x, donc la fonction f est décroissante sur $]-2\,;\,+\infty[$. Comme la fonction ln est croissante par composition la fonction g est décroissante sur $]-2\,;\,+\infty[$. VRAI

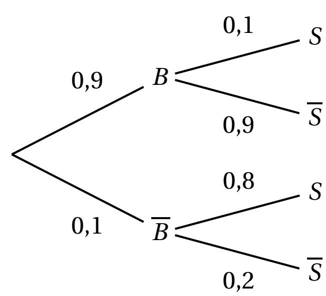
COMPLÉTER LE DOCUMENT RÉPONSE EN ANNEXE

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie I

1.



2. **a.** $p_{\overline{B}}\left(\overline{S}\right) = 1 - 0,8 = 0,2$

   b. D'après la loi des probabilités totales :
   $p(S) = p(B \cap S) + p\left(\overline{B} \cap S\right)$.
   $p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = 0,9 \times 0,1 = 0,09$;
   $p\left(\overline{B} \cap S\right) = p\left(\overline{B}\right) \times p_{\overline{B}}\left(\overline{S}\right) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$.
   Donc $p(S) = 0,09 + 0,08 = 0,17$.

   c. $p_S(B) = \dfrac{p(S \cap B)}{p(S)} = \dfrac{0,09}{0,17} = \dfrac{9}{17} \approx 0,53$.

Partie II

Le bon publicitaire et le cadeau associé coûtent 15 € au magasin. Un salon vendu rapporte 500 € au magasin s'il est vendu sans bon publicitaire.

1. On a $p\left(\overline{B}\cap\overline{S}\right) = p\left(\overline{B}\right)\times p_{\overline{B}}\left(\overline{S}\right) = 0,1\times 0,2 = 0,02$.

Situation de la personne entrant	La personne a un bon publicitaire et achète un salon	La personne a un bon publicitaire et n'achète pas un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et achète un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et n'achète pas un salon
Bénéfice réalisé par le magasin en euros	485	−15	500	0
Probabilité	0,09	0,81	0,08	0,02

2. Le bénéfice moyen est égal à l'espérance de la loi de probabilité bénéfice réalisé.
E$= 485\times 0,09+(-15)\times 0,81+500\times 0,08+0\times 0,02 = 43,65-12,15+40 = 71,5$.
Le bénéfice moyen par personne entrant est égal à 71,50 €.

3. Les bénéfices deviennent respectivement : $500-x$, $-x$, $500, 0$. D'où la nouvelle espérance :
$\text{E} = 0,09(500-x)-x\times 0,81+500\times 0,08+0\times 0,02 = 45-0,09x-0,81x+40 = 85-0,9x$.

4. On doit avoir $85-0,9x = 76 \iff 85-76 = 0,9x \iff 9 = 0,9x \iff 10 = x$.

EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties I et II sont indépendantes

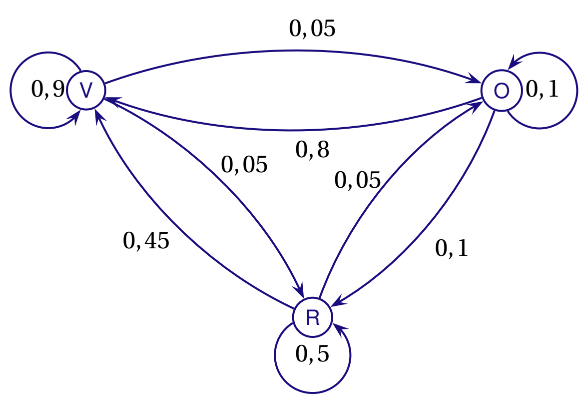
Partie I (calculs exacts demandés)

1. Les évènements étant indépendants, on a :
$p(A\cap B) = p(A)\times p(B) = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$.

2. La probabilité est de l'évènement A ou B soit :
$p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B) = \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{8} = \dfrac{6}{8}+\dfrac{4}{8}-\dfrac{3}{8} = \dfrac{7}{8}$.

Partie II (résultats demandés à 10^{-2} près)

1. a. Le graphe probabiliste décrivant cette situation est le suivant :



b. En suivant l'ordre V, O, R la matrice de transition M de ce graphe est

$$M = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,45 & 0,05 & 0,5 \end{bmatrix}$$

2. **a.** Si le premier feu rencontré est vert, le suivant sera orange avec une probabilité de $1-0,9-0,05=0,05$.
D'où $P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
Puis $P_2 = \begin{pmatrix}0,9 & 0,05 & 0,05\end{pmatrix}$.

b. On a $P_4 = P_3 \times M = \begin{pmatrix}0,87 & 0,05 & 0,08\end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,45 & 0,05 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0,859 & 0,0525 & 0,0885\end{pmatrix}$,
soit en arrondissant au centième $P_4 = \begin{pmatrix}0,86 & 0,05 & 0,09\end{pmatrix}$.
La probabilité que le quatrième feu soit vert est à peu près égale à 0,86.

3. Si le premier feu rencontré est rouge la probabilité que le feu suivant soit vert sera égale à $1-0,5-0,05=0,45$.
Donc $P_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix}0,45 & 0,05 & 0,5\end{pmatrix}$.

4. À partir d'un certain rang n les probabilités se stabilisent : la probabilité de rencontrer un feu vert sera environ de 0,85, celle de rencontrer un feu orange de 0,05 et celle de rencontrer un feu rouge de 0,1.

EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. La signification du couple (3 ; 149,60) est : la Terre est à une distance moyenne de 149,6 millions de km su Soleil.

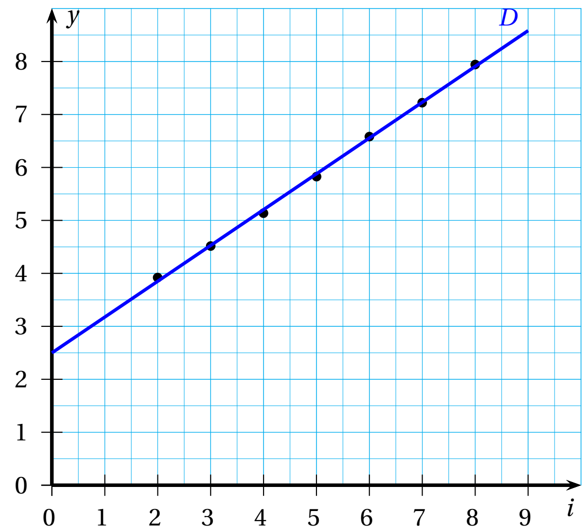
Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

2.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i	57,94	108,27	149,60	228,06	396,44	778,73	1 427,7	2 872,4
$d_i - d_1$	0	50,33	91,66	170,12	338,5	720,79	1 369,76	2 814,46
$y_i = \ln(d_i - d_1)$	×	3,919	4,518	5,137	5,825	6,580	7,222	7,943

3. **a.** Après arrondi au millième des coefficients donnés par la calculatrice, on obtient : $y = 0,676i + 2,499$.

b.



4. **a.** On a $y_i = 0,676i + 2,499 \iff \ln(d_i - 57,94) = 0,676i + 2,499 \iff$
$d_i - 57,94 = \mathrm{e}^{0,676i+2,499} \iff d_i - 57,94 = \mathrm{e}^{2,499} \times \mathrm{e}^{0,676i} \iff$
$d_i - 57,94 = \mathrm{e}^{2,499} \times \left(\mathrm{e}^{0,676}\right)^i \iff d_i = \mathrm{e}^{2,499} \times \left(\mathrm{e}^{0,676}\right)^i + 57,94.$
Or $\mathrm{e}^{2,499} \approx 12,1703 \approx 2,170$ et $\mathrm{e}^{0,676} \approx 1,966$, donc finalement $d_i = 57,94 + 12,17 \times 1,966^i$.

b. En utilisant l'ajustement précédent pour $i = 9$, on obtient :
$d_9 = 12,17 \times 1,966^9 + 57,94 \approx 5397,952 \approx 5398$ millions de kilomètres.

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

60 % de 200 millions font $0,6 \times 200 = 120$ millions. La droite d'équation $y = 120$ coupe la courbe représentative de D en un point dont l'abscisse est à peu près 10,75. C'est donc au cours de la 11e année.

Partie B

1. On a $V(t) = 200 - 200\left(1 - \mathrm{e}^{-0,086t}\right) = 200 - 200 + 200\mathrm{e}^{-0,086t} = 200\mathrm{e}^{-0,086t}$.
2. On a sur $[0 ; 13]$, $V'(t) = 200 \times (-0,086)\mathrm{e}^{-0,086t} = -17,2\mathrm{e}^{-0,086t}$.
Comme $\mathrm{e}^{-0,086t} > 0$, quel que soit t, $V'(t) < 0$, donc $V(t)$ est strictement décroissante sur $[0 ; 13]$ de $V(0) = 200$ à $V(13) = 200 \times \mathrm{e}^{-0,086\times 13} = 200\mathrm{e}^{-0,086\times 13} = 200\mathrm{e}^{-1,118} \approx 65,387$.
3. $V(13) \approx 65000$ au millier d'euros près.
4. Il faut résoudre l'équation :
$V(t) = 100 \iff 200 \times \mathrm{e}^{-0,086t} = 100 \iff \mathrm{e}^{-0,086t} = 0,5 \iff -0,086t = \ln 0,5 \iff$
$-0,086t = -\ln 2 \iff 0,086t = \ln 2 \iff t = \dfrac{\ln 2}{0,086}$. Or $\dfrac{\ln 2}{0,086} \approx 8,05$.
L'autocar a perdu la moitié de sa valeur au cours de la 9e année.

Partie C

$$R(t) = 110\left(5 + t - 5\mathrm{e}^{0,1t}\right).$$

1. **a.** La fonction R est dérivable sur $[0\,;\,13]$ et sur cet intervalle :
$R'(t) = 110\left(1 - 5\times 0,1\text{e}^{0,1t}\right) = 110\left(1 - 0,5\text{e}^{0,1t}\right)$.
• $1 - 0,5\text{e}^{0,1t} > 0 \iff 1 > 0,5\text{e}^{0,1t} \iff 2 > \text{e}^{0,1t} \iff \ln 2 > 0,1t \iff t < 10\ln 2$ ($10\ln 2 \approx 6,9$) ; la fonction R est croissante sur $[0\,;\,10\ln 2]$
• $1 - 0,5\text{e}^{0,1t} < 0 \iff 1 < 0,5\text{e}^{0,1t} \iff 2 < \text{e}^{0,1t} \iff \ln 2 < 0,1t \iff t > 10\ln 2$: la fonction R est décroissante sur $[10\ln 2\,;\,13]$

b. D'après la question précédente $R(10\ln 2)$ est le maximum de la fonction R sur $[0\,;\,13]$.
On a donc $t_0 = 10\ln 2 \approx 06,9 \approx 7$ à l'entier le plus proche.

c. Voir à la fin de l'exercice.

2. **a.** Il faut trouver la différence $E(t) = R(t) - D(t)$ la plus grande ; que ce soit graphiquement ou en regardant le tableau on constate que cette valeur est à peu près $t = 6$ pour un écart de 127. En fait, la calculatrice donne :
$E(5,9) \approx 127{,}2182$ et $E(6) \approx 127{,}2153$. Donc cet écart le plus grand survient la 5$^{\text{e}}$ année (2005).

b. D'après la courbe ou d'après le tableau de valeurs l'exploitation est déficitaire à partir de $t = 10$ soit en 2010.

ANNEXE I
(À remettre avec la copie)

EXERCICE 1

$f(x) = \dfrac{3x+6}{x+2}$	☐ VRAI	☐ FAUX
La courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $3,5$.	☐ VRAI	☐ FAUX
$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = 3$	☐ VRAI	☐ FAUX
$\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 6\ln 2.$	☐ VRAI	☐ FAUX
La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à $(\mathscr{C})$	☐ VRAI	☐ FAUX
$f(x) > 3$ pour tout x de $]-2\ ;\ +\infty[$.	☐ VRAI	☐ FAUX
$f'(-1) = -1.$	☐ VRAI	☐ FAUX
La fonction g définie sur $]-2\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln[f(x)]$ est décroissante.	☐ VRAI	☐ FAUX

EXERCICE 2

Situation de la personne entrant	La personne a un bon publicitaire et achète un salon	La personne a un bon publicitaire et n'achète pas un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et achète un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et n'achète pas un salon
Bénéfice réalisé par le magasin en euros	485	-15	500	0
Probabilité				

EXERCICE 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i	57,94	108,27	149,60	228,06	396,44	778,73	1 427,7	2 872,4
$d_i - d_1$	0			170,12				
$Y_i = \ln(d_i - d_1)$	×			5,137				

ANNEXE 2
(À remettre avec la copie)

EXERCICE 4

Représentation graphique

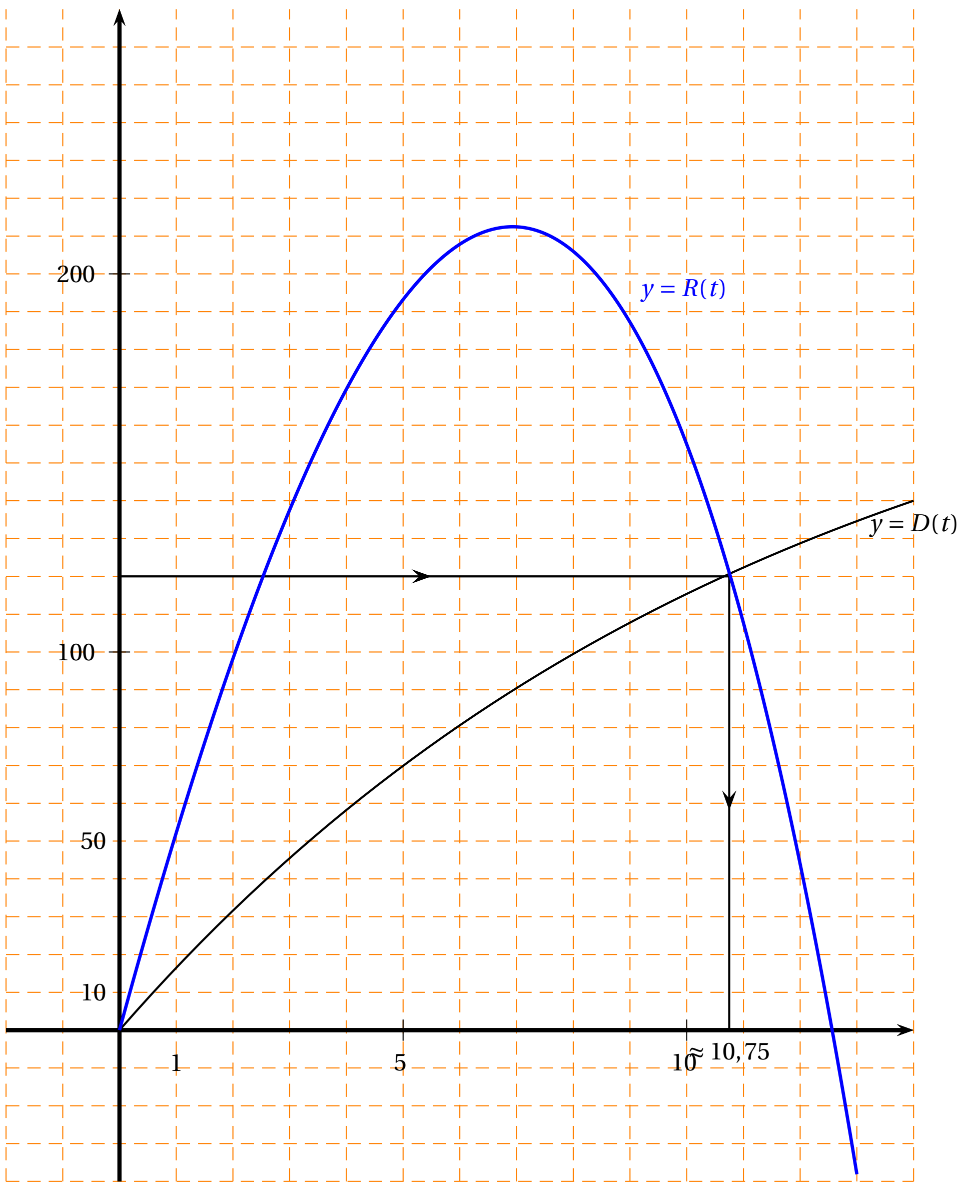


Tableau de valeurs :

t	0	1	2	4	6	8	10	11	13
$D(t)$	0	16	32	58	81	99	115	122	135
$R(t)$	0	52	98	169	208	206	155	108	-38
$E(t)$	0	36	67	111	127	107	40	-14	-173