

Corrigé du baccalauréat S Pondichéry

18 avril 2012

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

- Il y a $\binom{50}{5} = \frac{50!}{5! \times (50-5)!} = 2\,118\,760$ groupes différents de 5 coureurs.
- L_1 et L_3 n'ont pu être obtenus avec cet algorithme puisqu'ils contiennent des éléments identiques. Les deux autres oui.
 - Cet algorithme permet chaque jour de tirer au sort 5 coureurs pour subir un contrôle antidopage.
- Un joueur étant choisi, on peut lui adjoindre $\binom{49}{4}$ groupes de 4 coureurs différents sur les 49 restants.

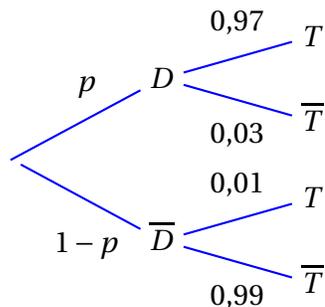
La probabilité pour qu'un coureur choisi au hasard subisse le contrôle prévu pour

cette étape est donc égale à $\frac{\binom{49}{4}}{\binom{50}{5}} = \frac{49!}{4! \times 45!} \times \frac{5! \times 45!}{50!} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} = 0,1$.

- Les tirages de groupes de 5 sont chaque jour indépendants les uns des autres et la probabilité d'être choisi pour un des 50 coureurs est égale à 0,1 : la loi X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.
 - On a $p(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,1^5 \times (1 - 0,1)^{10-5} = 252 \times 0,1^5 \times 0,9^5 \approx 0,00148$ soit environ 0,0015
 - $p(X = 0) = 0,1^0 \times 0,9^{10} \approx 0,3487$.
 - On a $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,9^{10} \approx 0,6513$.

Partie B

- En notant $p(D) = p$, on peut construire l'arbre suivant :



D'après la loi des probabilités totales :

$$p(T) = p_D(T) \times p(D) + p_{\overline{D}}(T) \times p(\overline{D}) \text{ ou encore } 0,05 = 0,97p + 0,01(1-p) \iff$$

$$0,05 = 0,97p + 0,01 - 0,01p \iff 0,96p = 0,04 \iff p = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}. \text{ (un peu plus de 2 coureurs sur 50)}$$

$$2. \text{ Il faut calculer } p_T(\overline{D}) = \frac{p(T \cap \overline{D})}{p(T)} = \frac{0,01(1 - \frac{1}{24})}{0,05} = \frac{1}{5} \times \frac{23}{24} = \frac{23}{120} \approx 0,19.$$

EXERCICE 2**4 points****Commun à tous les candidats****Proposition 1**

Un vecteur directeur \vec{d} de la droite \mathcal{D} a pour coordonnées $(-2 ; 2 ; 2)$;

Un vecteur \vec{u} normal au plan \mathcal{P} a pour coordonnées $(1 ; -1 ; -1)$.

Comme $\vec{d} = -2\vec{u}$, les vecteurs \vec{d} et \vec{u} sont colinéaires, donc la droite \mathcal{D} est orthogonale au plan \mathcal{P} . VRAIE

Proposition 2

Calculons la distance de O au plan \mathcal{P} : $d(O, \mathcal{P}) = \frac{|-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 2$

La distance n'étant pas égale au rayon de la sphère, la sphère \mathcal{S} de centre O et de rayon 2 n'est pas tangente au plan \mathcal{P} .

Rem. Comme $\frac{2}{\sqrt{3}} < 2$, on peut dire que la sphère et le plan sont sécants.

Proposition 3

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient à \mathcal{P} et à \mathcal{P}' si ses coordonnées vérifient les deux équations :

$$\begin{cases} x - y - z - 2 = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y = z + 2 \\ x + y = -3z \end{cases} \Rightarrow (\text{par somme}) 2x = -2z + 2 \iff x = -z + 1.$$

En reportant dans la première équation on obtient :

$$-z + 1 - y = z + 2 \iff -2z - 1 = y.$$

Finalement en posant $z = t'$, on a :

$$M(x ; y ; z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \iff \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases} \text{ VRAIE}$$

Remarque : on peut aussi vérifier que les points de Δ appartiennent aux deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' .

Proposition 4

Un vecteur directeur \vec{d} de la droite \mathcal{D} a pour coordonnées $(-2 ; 2 ; 2)$;

Un vecteur directeur \vec{v} de la droite Δ a pour coordonnées $(-1 ; -2 ; 1)$;

\vec{d} et \vec{v} ne sont pas colinéaires, donc \mathcal{D} et Δ ne sont pas parallèles; si elles sont sécantes il existe un point $M(x ; y ; z)$ dont les coordonnées vérifient les deux représentations paramétriques soit :

$$\begin{cases} -3-2t = 1-t' \\ 2t = -1-2t' \\ 1+2t = t' \end{cases} \iff \begin{cases} t' = 2t+4 \\ 2t' = -1-2t \\ t' = 1+2t \end{cases} \iff \begin{cases} 1+2t = 2t+4 \\ 2(1+2t) = -1-2t \\ t' = 1+2t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0t = 3 \\ 6t = -3 \\ t' = 1+2t \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution : les droites \mathcal{D} et Δ n'étant ni parallèles ni sécantes ne sont pas coplanaires. FAUSSE

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**

1. a. Les fonctions représentées sont positives; I_n représente donc l'aire de la surface limitée par le représentation de f_n , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Le dessin suggère que la suite (I_n) est décroissante.

$$\text{b. } f_{n+1}(x) = \frac{e^{-(n+1)x}}{1+x} = \frac{e^{-nx} \times e^{-x}}{1+x} = \frac{e^{-nx}}{1+x} \times e^{-x} = f_n(x) \times e^{-x}.$$

Or $0 \leq x \leq 1 \iff -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow$ (par croissance de la fonction exponentielle) $e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^0$. En multipliant chaque membre de cette dernière inégalité par $f_n(x) > 0$, on obtient :

$$f_n(x) \times e^{-x} \leq f_n(x) \times 1, \text{ soit finalement :}$$

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

Par intégration sur l'intervalle $[0; 1]$ des fonctions continues f_{n+1} et f_n :

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n : \text{ la suite } (I_n) \text{ est décroissante.}$$

2. a. $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+x \leq 2 \iff \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1}$ et par produit par le nombre

$$\text{positif } e^{-nx}, \text{ on obtient : } \frac{e^{-nx}}{1+x} \leq e^{-nx}.$$

D'autre part on sait que pour $1+x \geq 1$, on a $(1+x)^2 \geq 1+x \iff$

$$\frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{1+x} \text{ et par produit par le nombre positif } e^{-nx}, \text{ on obtient :}$$

$$\frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leq \frac{e^{-nx}}{1+x}.$$

Enfin il est évident que $\frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} > 0$, donc finalement :

$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leq \frac{e^{-nx}}{1+x} \leq e^{-nx}.$$

- b. Par intégration sur l'intervalle $[0; 1]$ des inégalités précédentes on obtient

$$\int_0^1 0 \, dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \, dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} \, dx \leq \int_0^1 e^{-nx} \, dx \text{ soit encore}$$

$$0 \leq J_n \leq I_n \leq \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 \text{ c'est à dire :}$$

$$0 \leq J_n \leq I_n \leq -\frac{1}{n} (e^{-n} - 1).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n}(e^{-n} - 1) = 0$.

Conclusion d'après le théorème des « gendarmes », les suites (I_n) et (J_n) convergent vers 0.

3. a. Posons
$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{1+x} & v'(x) = e^{-nx} \\ u'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} & v(x) = -\frac{1}{n}e^{-nx} \end{cases}$$

Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur $[0; 1]$; en intégrant par parties on a donc :

$$I_n = \left[-\frac{1}{n(1+x)}e^{-nx} \right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} e^{-nx} dx;$$

$$I_n = \left[-\frac{e^{-n}}{2n} + \frac{1}{n} \right] - \frac{1}{n} J_n \text{ ou encore}$$

$$I_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n \right).$$

b. Le résultat précédent peut s'écrire en multipliant par $n \neq 0$:

$$nI_n = 1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$$

Remarque : on a donc pour n assez grand $I_n \approx \frac{1}{n}$.

Exemple : pour $n = 10$, la calculatrice donne $I_{10} \approx 0,091 \approx \frac{1}{10}$.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A Restitution organisée de connaissances

Partie B : Étude d'une transformation particulière

1. a. On a $z_{C'} = \frac{1 - (-2 + i)}{-2 + i - 1} = \frac{3 - i}{-3 - i} = \frac{(3 - i)(-3 + i)}{(-3 - i)(-3 + i)} = \frac{-9 + 1 + 3i + 3i}{9 + 1} = \frac{-8 + 6i}{10} = -\frac{4}{5} + i\frac{3}{5}$.

b. De $|z_{C'}|^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$, on déduit que le point C' appartient au cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.

$|z_{C'}| = OC' = 1$ ce qui montre que C' appartient au cercle \mathcal{C} de centre O et de rayon 1.

$$c. \text{ Calculons } \frac{z_C - z_A}{z_{C'} - z_A} = \frac{-2 + i - 1}{\frac{-4 + 3i}{5} - 1} = \frac{-15 + 5i}{-9 + 3i} = \frac{5(-3 + i)}{3(-3 + i)} = \frac{5}{3} \in \mathbb{R}.$$

L'argument de ce quotient est donc nul, soit $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}) = 0 \pmod{2\pi}$, ce qui signifie que les points A, C et C' sont alignés.

2. Les points qui ont pour image le point A d'affixe 1 ont une affixe $z \neq 1$ telle que :

$$z' = 1 = \frac{1 - z}{\bar{z} - 1}.$$

En posant $z = x + iy$, l'équation précédente s'écrit :

$$1 = \frac{1 - x - iy}{x - iy - 1} \iff x - iy - 1 = 1 - x - iy \iff 2x - 2 = 0 \iff x = 1$$

Les points solutions ont donc pour affixe $z = 1 + iy$ avec $y \neq 0$: ce sont les points de la droite Δ d'équation $x = 1$ privée du point A.

$$3. \text{ On a pour } z \neq 1, \quad |z'| = \left| \frac{1 - z}{\bar{z} - 1} \right| = \frac{|1 - z|}{|\bar{z} - 1|} = \frac{|1 - x - iy|}{|x - iy - 1|} = \frac{\sqrt{(1 - x)^2 + y^2}}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}} = 1.$$

On vient donc de démontrer que pour tout point M d'affixe $z \neq 1$,

$$|z'| = OM' = 1.$$

Tous les points M' appartiennent au cercle \mathcal{C} .

$$4. \text{ Calculons pour } z \neq 1, \text{ le quotient } \frac{z' - 1}{z - 1} = \frac{\frac{1 - z}{\bar{z} - 1} - 1}{z - 1} = \frac{1 - z - \bar{z} + 1}{(z - 1)(\bar{z} - 1)}.$$

Le numérateur : $1 - z - \bar{z} + 1 = 2 - (z + \bar{z}) = 2 - 2x \in \mathbb{R}$;

Le dénominateur : $(z - 1)(\bar{z} - 1) = (z - 1)\overline{z - 1} = |z - 1|^2 \in \mathbb{R}_+$ (réel positif). Finalement

$\frac{z' - 1}{z - 1} \in \mathbb{R}$ signifie qu'il existe un réel k tel que $z' - 1 = k(z - 1)$ ou encore $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$, ce qui signifie que les points A, M et M' sont alignés.

5. D'après la question précédente, D' est aligné avec A et D, donc

- D' appartient au cercle \mathcal{C} ;

- D' est sur la droite (AD).

La construction est donc évidente.

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A Restitution organisée de connaissance

Partie B Inverse de 23 modulo 26

1. $23 \times (-9) - 26 \times (-8) = -207 + 208 = 1$: le couple $(-9; -8)$ est solution de l'équation (E).

$$2. \begin{cases} 23x - 26y & = 1 \\ 23 \times (-9) - 26 \times (-8) & = 1 \end{cases} \implies (\text{par différence membre à membre})$$

$$23(x + 9) - 26(y + 8) = 0 \iff 23(x + 9) = 26(y + 8) \quad (1)$$

Donc 23 divise $26(y+8)$ et comme il est premier avec 26; il divise $y+8$ (théorème de Gauss) : il existe donc un entier k tel que $y+8 = 23k \iff y = -8 + 23k$.

En remplaçant dans (1) $y+8$ par $23k$, on obtient :

$$23(x+9) = 26 \times 23k \iff x+9 = 26 \iff x = -9 + 26k.$$

Réciproquement les couples $(-9 + 26k; -8 + 23k)$ vérifient (E) car

$$23(-9 + 26k) - 26(-8 + 23k) = -207 + 23 \times 26k + 208 - 26 \times 23k = 1.$$

Les couples solutions de (E) sont donc de la forme : $(-9 + 26k; -8 + 23k)$, $k \in n\mathbb{Z}$.

3. Il faut trouver un (ou des) couple(s) de premier terme a tel que $0 \leq a \leq 25$, donc vérifiant :

$$0 \leq -9 + 26k \leq 25 \iff 9 \leq 26k \leq 34. \text{ La solution } k = 1 \text{ est évidente ce qui donne } a = -9 + 26 = 17.$$

Donc comme $26b \equiv 0 \pmod{26}$, on a $23 \times 17 \equiv 1 \pmod{26}$.

Partie C Chiffrement de Hill

1. $\underbrace{\text{ST}}_{\text{mot en clair}} \xrightarrow{\text{étape1}} (18, 19) \xrightarrow{\text{étape2}} (21, 20) \xrightarrow{\text{étape3}} \underbrace{\text{VU}}_{\text{mot codé}}$

2. a. $(S_1) \begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \pmod{26} \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \pmod{26} \end{cases} \implies \begin{cases} -44x_1 - 12x_2 = -4y_1 \pmod{26} \\ 21x_1 + 12x_2 = 3y_2 \pmod{26} \end{cases} \implies (\text{par somme})$
 $-23x_1 = -4y_1 + 3y_2 \pmod{26}.$

De même :

$$(S_1) \begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \pmod{26} \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \pmod{26} \end{cases} \implies \begin{cases} -77x_1 - 21x_2 = -7y_1 \pmod{26} \\ 77x_1 + 44x_2 = 11y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

\implies (par somme) $23x_2 = -7y_1 + 11y_2 \pmod{26}$ ou encore puisque $-7 \equiv 19 \pmod{26}$: $23x_2 = 19y_1 + 11y_2 \pmod{26}$.

Donc, tout couple $(x_1; x_2)$ vérifiant les équations du système (S_1) , vérifie les équations du système :

$$(S_2) \begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2 \pmod{26} \\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

- b. On a vu à la partie B que $23 \times 17 \equiv 1 \pmod{26}$ (23 a pour inverse 17 modulo 26), donc en multipliant chaque membre du système (S_2) par 17, on obtient

$$(S_2) \iff \begin{cases} 23x_1 \times 17 \equiv 4y_1 \times 17 + 23y_2 \times 17 \pmod{26} \\ 23x_2 \times 17 \equiv 19y_1 \times 17 + 11y_2 \times 17 \pmod{26} \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 \equiv 68y_1 + 391y_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 323y_1 + 187y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

Or $68 \equiv 16 \pmod{26}$, $391 \equiv 1 \pmod{26}$, $323 \equiv 11 \pmod{26}$,

$187 \equiv 5 \pmod{26}$, donc finalement tout couple $(x_1; x_2)$ vérifiant les équations du système (S_2) , vérifie les équations du système

$$(S_3) \begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 & (\text{mod } 26) \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 & (\text{mod } 26) \end{cases}$$

c. On calcule $11x_1 + 3x_2 = 11(16y_1 + y_2) + 3(11y_1 + 5y_2) = 176y_1 + 11y_2 + 33y_1 + 15y_2 = 209y_1 + 26y_2$.

Or $209 \equiv 1 \pmod{26}$ et $26 \equiv 0 \pmod{26}$, donc $11x_1 + 3x_2 \equiv 1y_1 + 0y_2 \pmod{26}$.

De même $7x_1 + 4x_2 = 7(16y_1 + y_2) + 4(11y_1 + 5y_2) = 112y_1 + 7y_2 + 44y_1 + 20y_2 = 156y_1 + 27y_2$.

Or $156 \equiv 0 \pmod{26}$ et $27 \equiv 1 \pmod{26}$, donc $7x_1 + 4x_2 \equiv 0y_1 + 1y_2 \pmod{26}$.

Conclusion : tout couple $(x_1 ; x_2)$ vérifiant les équations du système (S_3) , vérifie les équations du système (S_1) .

Finalement les systèmes (S_1) et (S_3) sont équivalents.

d. Pour YJ le couple $(y_1 ; y_2) = (24 ; 9)$. En appliquant les équations de (S_3) on obtient :

$$\begin{cases} x_1 \equiv 16 \times 24 + 9 & (\text{mod } 26) \\ x_2 \equiv 11 \times 24 + 5 \times 9 & (\text{mod } 26) \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 \equiv 393 & (\text{mod } 26) \\ x_2 \equiv 309 & (\text{mod } 26) \end{cases}$$

Or $393 = 26 \times 15 + 3$, donc $393 \equiv 3 \pmod{26}$;

$309 = 26 \times 11 + 23$, donc $309 \equiv 23 \pmod{26}$.

On a donc $(x_1 ; x_2) = (3 ; 23)$ et en utilisant le tableau le mot décodé est donc **DX**.

Annexe à rendre avec la copie

EXERCICE 4

