Durée : 4 heures

Baccalauréat S Pondichéry 16 avril 2009

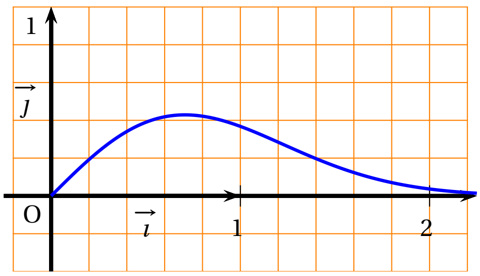
EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = x\text{e}^{-x^2}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ du plan. Cette courbe est représentée ci-contre.



Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{x^2}{\text{e}^{x^2}}$).

   b. Démontrer que f admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et calculer ce maximum.
2. Soit a un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de a, l'aire $F(a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.
   Quelle est la limite de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\text{d}x.$$

On ne cherchera pas à expliciter u_n.

1. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1

   $$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

   b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$?

   c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
2. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   On donne ci-dessous les valeurs de $F(n)$ obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
$F(n)$	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

   Interpréter ces résultats.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - \text{i},\quad b = 1 - 3\text{i} \text{ et } c = -1 - \text{i}.$$

1. **a.** Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?
   c. Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.
2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, image de A dans la rotation r de centre M et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
   a. Donner l'écriture complexe de la rotation r.
   b. En déduire une expression de n en fonction de m.
3. On appelle Q le milieu du segment [AN] et q son affixe.
   Montrer que : $q = \dfrac{(1-\text{i})m}{2} + 2 + \text{i}$.
4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.
   a. Justifier l'existence d'un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}\,\text{e}^{\text{i}\theta}$.
   b. Calculer $|q - 2 - \text{i}|$. Quel est le lieu Γ' de Q lorsque M décrit le cercle Γ ?

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \text{i}$ et $z_{\text{B}} = 1 + 2\text{i}$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que :

$$S(\text{O}) = \text{A} \text{ et } S(\text{A}) = \text{B}.$$

2. Montrer que l'écriture complexe de S est :

$$z' = (1-\text{i})z + \text{i}.$$

   Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).

On considère la suite de points (A_n) telle que :
- A_0 est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = S(A_n)$.

On note z_n, l'affixe de A_n. (On a donc $A_0 = \text{O}$, $A_1 = \text{A}$ et $A_2 = \text{B}$).

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1-\text{i})^n$.
   b. Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.
   Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n},~\overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.
   c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n.
   Construire les points A_3 et A_4.
4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ on considère les points :
A de coordonnées (1 ; 1 ; 0), B de coordonnées (2 ; 0 ; 3), C de coordonnées (0 ; −2 ; 5) et D de coordonnées (1 ; −5 ; 5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ tels que $y = 2x+4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système {(A, 1), (B, 1), (C, 2)}, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3 ; 3 ; 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x+2y+z+3=0$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.
   a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
   b. Quelle est son espérance ?
   c. Calculer $P(X=2)$.
2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.
   On considère les évènements D et A suivants :
   - D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
   - A : « obtenir exactement deux 6 ».

   a. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
   - « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

   (On pourra construire un arbre de probabilité).

   b. En déduire que : $p(A) = \frac{7}{48}$.

   c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?
3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).
   On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».
   a. Déterminer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement B_n.
   b. Calculer la limite de la suite $\left(p_n\right)$. Commenter ce résultat.