Corrigé du baccalauréat S Pondichéry
16 avril 2009

EXERCICE 1 **7 points**

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$.

Partie A

1. **a.** On remarque que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

Or $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0 \end{cases}$ *(Inverse de limite de référence.)*

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{-x^2}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et, par produit des limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition comme produit de fonctions dérivables.
Pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} + x \times (-2x)\mathrm{e}^{-x^2}$.
Formules utilisées $(uv)' = u'v + uv'$ *et* $(e^u)' = u'e^u$.
Donc $g'(x) = (1-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$. Comme $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, $g'(x)$ est du signe de $1-2x^2$, polynôme du second degré nul pour $x^2 = 1/2$ et négatif sauf entre ses racines. Donc $g'(x) > 0$ si $x \in \left[0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et $g'(x) < 0$ si $x \in \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ +\infty\right[$. La fonction g est donc croissante puis décroissante et admet un maximum en $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Enfin, $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{e}}}$.

2. $F(a) = \displaystyle\int_0^a x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a^2}$.

$\displaystyle\lim_{a\to+\infty} F(a) = \frac{1}{2}$ car $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} e^{-a^2} = 0$.

Partie B $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$

1. **a.** La fonction f est décroissante sur $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant 1$ donc, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, f est décroissante sur $[n\ ;\ n+1]$ et pour tout $x \in [n\ ;\ n+1]$, $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$. L'inégalité de la moyenne permet de dire que

$$(n+1-n)f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant (n+1-n)f(n)$$

c.à.d. $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$

b. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant f(n+1) \geqslant u_{n+1}$ donc la suite est décroissante à partir du rang 1.

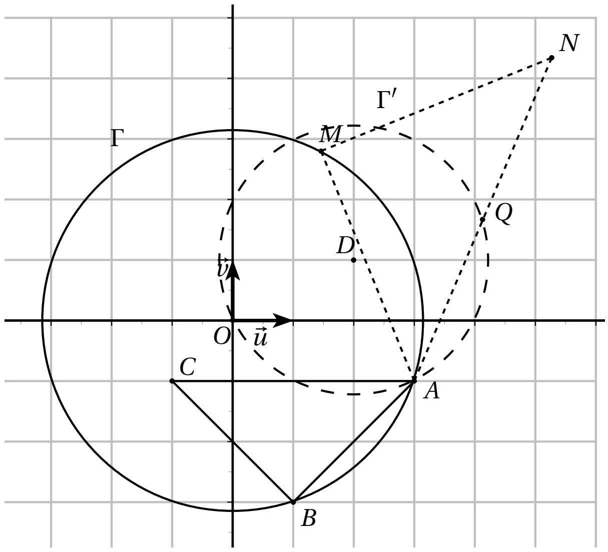
c. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$ et que pour tout $n \geqslant 1$, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$, la suite (u_n) converge vers 0. (*Théorème de comparaison*)

2. **a.** Pour tout $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)\,\mathrm{d}x}_{n \text{ termes}}$. En utilisant la relation de Chasles, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x = F(n)$.

b. Le tableau illustre le fait que $(F(n))$ converge vers $1/2$, conséquence du résultat démontré en A.2. Mais il illustre aussi le fait que la convergence est très rapide. En effet, $1/2 - F(n) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-n^2}$ et, pour tout $n \geqslant 5$, on a $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-n^2} \leqslant \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-25} < 7.10^{-12}$. Donc $F(5)$ est une bonne approximation de l'aire sous la courbe entre 0 et $+\infty$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



1. **a.**

b. $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{-2+2\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(2+2\mathrm{i})}{2+2\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ de module 1 et d'argument $\pi/2$ donc $BA = BC$ et $(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}) = \pi/2$. (*Interprétation géométrique d'un quotient*). Le triangle ABC est donc rectangle isocèle de sommet B.

c. $|a| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ et $|b| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ donc $OA = OB = \sqrt{10}$. Les points sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{10}$.

2. **a.** La rotation de centre $M(m)$ et d'angle $\pi/2$ a pour expression complexe : $z' = e^{\mathrm{i}\pi/2}(z-m)+m$ soit $z' = \mathrm{i}z + (1-\mathrm{i})m$.

b. $N(n)$ est l'image de A par r, donc $n = \mathrm{i}a + (1-\mathrm{i})m = 1+3\mathrm{i} + (1-\mathrm{i})m$.

3. Le milieu Q du segment [AN] a pour affixe $q = \dfrac{a+n}{2} = 2+\mathrm{i}+\dfrac{(1-\mathrm{i})m}{2}$.

4. Dans cette question, M est un point du cercle Γ.

a. Le point $M(z)$ est sur le cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon r si et seulement s'il existe un réel θ tel que $z = \omega + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ (*Représentation paramétrique d'un cercle*). Ici, M est sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{10}$ donc il existe un réel θ tel que : $m = \sqrt{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

b. $|q-2-\mathrm{i}| = \left|\dfrac{(1-\mathrm{i})m}{2}\right| = \dfrac{1}{2}|1-\mathrm{i}|.|m| = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{10} = \sqrt{5}$. Si D est le point d'affixe $d = 2+\imath$, alors $DQ = \sqrt{5}$ donc Q est sur le cercle de centre D et de rayon $\sqrt{5}$.

Plus précisément, $q-d = \dfrac{(1-\mathrm{i})m}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\sqrt{10}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi/4)}$. Quand M décrit le cercle Γ, θ décrit $\mathbb{R}$, $\theta - \pi/4$ décrit $\mathbb{R}$ et le point Q décrit **tout le cercle** de centre D et de rayon $\sqrt{5}$.

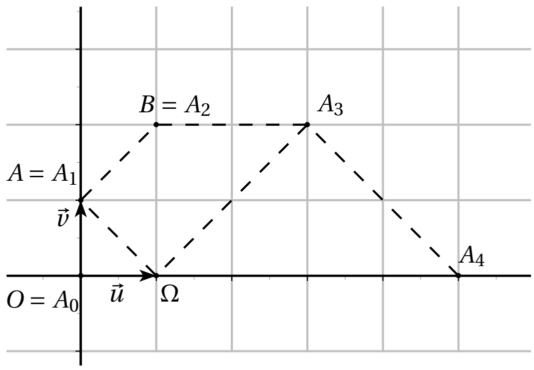
EXERCICE 2 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

$z_{\text{A}} = \text{i}$ et $z_{\text{B}} = 1 + 2\text{i}$.

1. Les points O et A sont distincts et les points A et B aussi, il existe donc une unique similitude directe S telle que : $S(\text{O}) = \text{A}$ et $S(\text{A}) = \text{B}$. (*Similitude définie par les images distinctes de deux points distincts*)
2. On note $z' = az + b$ l'écriture complexe de la similitude S.
   $S(O) = A \iff z_A = a \times 0 + b \iff b = \text{i}$,
   $S(A) = B \iff z_B = az_A + b \iff 1 + 2\text{i} = a\text{i} + \text{i} \iff a\text{i} = 1 + \text{i} \iff a = 1 - \text{i}$.
   L'écriture complexe de S est donc $z' = (1 - \text{i})z + \text{i}$
   Le complexe $1 - \text{i}$ a pour module $\sqrt{2}$ et pour argument θ tel que
   $$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{soit } \theta = -\frac{\pi}{4}$$
   Le point invariant par S est le point $\Omega(\omega)$ vérifiant :
   $w = (1 - \text{i})\omega + \text{i} \iff \text{i}\omega = \text{i} \iff \omega = 1$
   S est une similitude directe de centre $\Omega(1)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'argument $-\dfrac{\pi}{4}$.
3. **a.** Les affixes z_n des points A_n vérifient $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = (1 - \text{i})z_n + \text{i}$. En outre, puisque $\Omega(1)$ est centre de S, on a $z_{n+1} - 1 = (1 - \imath)(z_n - 1)$. La suite $(z_n - 1)$ est donc géométrique de raison $1 - \text{i}$ et de premier terme $z_0 - 1 = -1$. Et pour tout n, $z_n - 1 = (-1)(1 - \text{i})^n$, soit $z_n = 1 - (1 - \text{i})^n$.

   b. $\overrightarrow{\Omega A_n}$ a pour affixe $z_n - 1 = -(1 - \text{i})^n$.
   $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ a pour affixe $z_{n+1} - z_n = (1 - \text{i})^n - (1 - \text{i})^{n+1} = (1 - \text{i})^n \text{i}$.
   Pour tout n, $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_n - 1} = -\text{i} = \text{e}^{-\text{i}\pi/2}$ donc (*Interprétation géométrique d'un quotient*), $\Omega A_n = A_n A_{n+1}$ et $\left(\overrightarrow{\Omega A_n}, \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

   c. Le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est donc un triangle rectangle isocèle indirect de sommet A_n. Les points successifs se construisent donc en traçant des triangles rectangles isocèles.



4. Le point (A_n) appartient à la droite (ΩB) si et seulement si $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A_n}) = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
   Or $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A_n}) = \text{Arg}\left(\dfrac{z_n - 1}{z_2 - 1}\right) = \text{Arg}((1 - \text{i})^{n-2}) = (n - 2)\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ donc
   $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A_n}) = k\pi \iff -\dfrac{n-2}{4} = k \iff n - 2 = -4k \iff n \equiv 2 \pmod 4$

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ A a pour coordonnées $(1;1;0)$, B $(2;0;3)$, C$(0\ ;\ -2\ ;\ 5)$ et D$(1\ ;\ -5\ ;\ 5)$.

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $y = 2x+4$ est une droite. **FAUX**

L'équation $y = 2x+4$ caractérise un plan passant E$(0\ ;\ 4\ ;\ 0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2,-1,0)$

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A,\ 1),\ (B,\ 1),\ (C,\ 2)\}$, et de rapport 3. **FAUX.**

L'égalité vectorielle s'écrit encore $\overrightarrow{MM'} = 4\overrightarrow{MG}$ (*réduction vectorielle*), soit encore $\overrightarrow{GM'} = -3\overrightarrow{GM}$, caractérisant une homothétie de centre G et de rapport -3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires. **FAUX**

Les vecteurs $\overrightarrow{DA}\,(0\ ;\ 6\ ;\ -5)$, $\overrightarrow{DB}\,(1\ ;\ 5\ ;\ -2)$ et $\overrightarrow{DC}\,(-1\ ;\ 3\ ;\ 0)$ ne sont pas coplanaires. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$ ne sont pas colinéaires (composantes nulles différentes) et $\overrightarrow{DB}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$.

En effet $\overrightarrow{DB} = x\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{DC} \iff \left\{\begin{array}{rcl} -y & = & 1 \\ 6x+3y & = & 5 \\ -5x & = & -2 \end{array}\right.$ Équations incompatibles.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées $(3;\ 3;\ 0)$ et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x+2y+z+3=0$. **VRAI.**

La distance du point Ω au plan est égale à $\dfrac{|2\times3+2\times3+0+3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 5$ donc est égale au rayon de la sphère.

EXERCICE 4 — 4 points

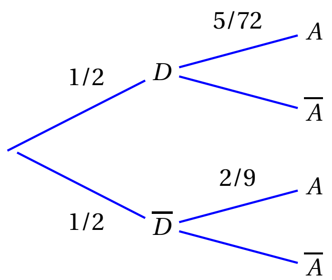
Commun à tous les candidats

1. **a.** Il s'agit d'une expérience à deux issues avec une probabilité de succès $p = \dfrac{1}{6}$ et une probabilité d'échec $q = \dfrac{5}{6}$ que l'on répète de manière indépendante 3 fois. X représente le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$.

   b. L'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p est np. Donc $E(X) = 3\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$

   c. $P(X=2) = \dbinom{3}{2}p^2q^1 = 3\times\dfrac{5}{6^3} = \dfrac{5}{72}$.

2. **a.**



   L'événement « choisir le dé équilibré et obtenir exactement deux six » correspond à $D \cap A$.

$p(D \cap A) = p(D) \times p_D(A) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{72} = \dfrac{5}{144}$.

L'événement « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux six » correspond à $\overline{D} \cap A$.

$p(\overline{D} \cap A) = p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(A)$.

On utilise un raisonnement analogue au 1.c. :

$p_{\overline{D}}(A) = \dbinom{3}{2} p'^2 q'^1$ où $p' = \dfrac{1}{3}$. Donc $p_{\overline{D}}(A) = \dfrac{2}{9}$ et $p\left(\overline{D} \cap A\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{9}$.

b. On en déduit que $p(A) = p(D \cap A) + p\left(\overline{D} \cap A\right) = \dfrac{5}{144} + \dfrac{16}{144} = \dfrac{21}{144} = \dfrac{7}{48}$.

c. Il s'agit de calculer $p\left(\overline{D} \text{ sachant } A\right) = \dfrac{p\left(\overline{D} \cap A\right)}{p(A)} = \dfrac{1}{9} \times \dfrac{48}{7} = \dfrac{16}{21}$.

3. a. $p_D(B_n) = 1 - p_D(\text{« n'obtenir aucun 6 »}) = 1 - q^n = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$. De même $p_{\overline{D}}(B_n) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. On applique alors la formule des probabilités totales :

$p_n = p(B_n) = p(D) \times p_D(B_n) + p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(B_n) = 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ car $\dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{2}{3}$ appartiennent à $]-1\,;\,1[$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$. Ce résultat est prévisible car, quel que soit le dé, à condition de jouer suffisamment longtemps, on a une quasi certitude d'obtenir au moins une fois un 6. (ici, $p_{22} > 0,99$ et $p_{100} \approx 1$).