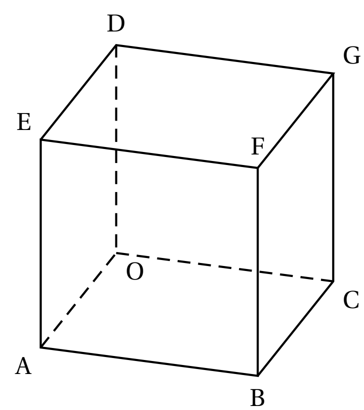
Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie septembre 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère le cube OABCDEFG d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.
Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.
Soient les points P et Q tels que $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OQ} = 4\overrightarrow{OC}$.
On appelle R le barycentre des points pondérés (B, −1) et (F, 2).
L'espace est muni du repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OC},\,\overrightarrow{OD}\right)$.

1. **a.** Démontrer que le point R a pour coordonnées $(1\,;\,1\,;\,2)$.
   b. Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.
   c. Quelle est la nature du triangle PQR ?
2. **a.** Démontrer qu'une équation du plan (PQR) est $4x+2y+z-8=0$.
   b. Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).
3. On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR).
   a. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DH).
   b. Déterminer les coordonnées du point H.
   c. Démontrer que le point H appartient à la droite (PR).



EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, deux propositions sont énoncées.
Il s'agit de dire, sans le justifier, si chacune d'elles est vraie ou fausse. ***Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la proposition et la mention VRAIE ou FAUSSE****.*

Pour chaque question, il est compté 1 *point si les deux réponses sont exactes,* 0,5 *point pour une réponse exacte et une absence de réponse et* 0 *point sinon.*

Question A Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire deux boules au hasard simultanément. On considère les évènements : A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ; B : « une seule des deux boules tirées est rouge ».	Proposition 1 La probabilité de A est égale à $\frac{3}{7}$.	Proposition 2 La probabilité de B est égale à $\frac{1}{7}$.
Question B Soient A, B et C trois évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité P. On sait que : • A et B sont indépendants ; • $P(\text{A}) = \frac{2}{5}$; $P(\text{A} \cup \text{B}) = \frac{3}{4}$; • $P(\text{C}) = \frac{1}{2}$; $P(\text{A} \cap \text{C}) = \frac{1}{10}$.	Proposition 3 $P(\text{B}) = \frac{7}{12}$	Proposition 4 $P\left(\overline{\text{A} \cup \text{C}}\right) = \frac{2}{5}$. $\overline{\text{A} \cup \text{C}}$ désigne l'évènement contraire de $\text{A} \cup \text{C}$.
Question C Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à $]0\,;\,1[$.	Proposition 5 Si $P(X = 1) = 8P(X = 0)$ alors $p = \frac{2}{3}$.	Proposition 6 Si $p = \frac{1}{5}$ alors $P(X = 1) = P(X = 0)$.
Question D La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,07$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. On rappelle que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$ est donnée par : $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x$ (avec $\lambda = 0,07$).	Proposition 7 La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.	Proposition 8 Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.
On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + \text{i} - \frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \text{i}$ et $b = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A′ et B′ par F d'affixes respectives a' et b'.
   a. Calculer a' et b'.
   b. Placer les points A, A′ B et B′.
   c. Démontrer que $\dfrac{-b}{b' - b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$.
   d. En déduire la nature du triangle OBB′.

2. On recherche l'ensemble (E) des points du plan P privé du point O qui ont pour image par F, le point O.
   a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,
   $$z^2+\mathrm{i}z-1=\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right).$$
   b. En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).
   c. Démontrer que les points de (E) appartiennent à (Γ).
3. Soit θ un réel.
   a. Démontrer que si $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ alors $z'=(2\sin\theta+1)\mathrm{i}$.
   b. En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment $[\mathrm{A}'\mathrm{C}]$ où C a pour affixe $-\mathrm{i}$.

EXERCICE 4 **7 points**

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f_n(x)=-nx-x\ln x.$$

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
Les courbes $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2 sont données en annexe.
On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$.

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f_0(x)=-x\ln x$.

1. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0~;~+\infty[$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que pour $x\in]0~;~+\infty[$, $f_n'(x)=-n-1-\ln x$ où f_n' désigne la fonction dérivée de f_n.
2. a. Démontrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   b. Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y=x$.
   c. Placer sur la figure en annexe les points A_0, A_1, A_2.
3. a. Démontrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n, dont l'abscisse est e^{-n}.
   b. Démontrer que la tangente à $(\mathcal{C}_n)$ au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.
   c. Placer sur la figure en annexe les points B_0, B_1, B_2.

Partie C : Calculs d'aires

Pour tout entier naturel n, on considère le domaine du plan D_n délimité par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C}_n)$ et les droites d'équation $x=\mathrm{e}^{-n-1}$ et $x=\mathrm{e}^{-n}$.
On note I_n l'aire en unités d'aires du domaine D_n.

1. Hachurer, sur la figure donnée en annexe, les domaines D_0, D_1, D_2.

2. **a.** À l 'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} x \ln x \, \mathrm{d}x$.

b. En déduire que $I_0 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4\mathrm{e}^2}$.

c. On admet que le domaine D_{n+1} est l'image du domaine D_n par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Exprimer I_1 et I_2 en fonction de I_0.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise à la fin de l'épreuve

Exercice 4