∾ Corrigé du baccalauréat S (obligatoire) Polynésie ∾ septembre 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Par définition, comme $-1+2 \neq 0$, R existe et vérifie $-\overrightarrow{\text{RB}}+2\overrightarrow{\text{RF}}=\overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\text{OR}}=-\overrightarrow{\text{OB}}+2\overrightarrow{\text{OF}}$.

   Comme B(1 ; 1 ; 0) et F(1 ; 1 ; 1), on obtient R(1 ; 1 ; 2).

   b. A et C appartiennent au plan OABC, donc P et Q également. Or R appartient par définition à la droite (BF). Il ne pourrait être aligné avec P et Q que s'il était égal au point B du plan OABC, ce qui est faux.

   P, Q et R ne peuvent donc être alignés. On a P(2 ; 0 ; 0) et Q(0 ; 4 ; 0)

   c. On a P(2 ; 0 ; 0) et Q(0 ; 4 ; 0). Donc $\overrightarrow{\text{PQ}}\,(-2\,;\,4\,;\,0)$, $\overrightarrow{\text{PR}}\,(-1\,;\,1\,;\,2)$ et $\overrightarrow{\text{QR}}\,(1\,;\,-3\,;\,2)$.

   $\overrightarrow{\text{PR}}\cdot\overrightarrow{\text{QR}}=(-1)\times 1+1\times(-3)+2\times 2=-1-3+4=0$, donc les droites (PR) et (QR) sont perpendiculaires : le triangle PQR est rectangle en R.

   D'autre part $\text{PR}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$ et $\text{QR}=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$. Donc le triangle n'est pas isocèle.

2. **a.** Un vecteur $\overrightarrow{n}\,(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$ normal au plan PQR est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\text{PR}}$; donc $-\alpha+\beta+2\gamma=0$.

   De même $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{PQ}}$ donc $-2\alpha+4\beta=0 \iff \alpha=2\beta$, soit en reportant dans la première égalité :

   $-2\beta+\beta+2\gamma=0 \iff \gamma=\dfrac{1}{2}\beta$.

   Donc $\overrightarrow{n}\left(2\beta\,;\,\beta\,;\,\dfrac{1}{2}\beta\right)$.

   $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\text{PQR} \iff \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{P}M}=0 \iff 2\beta(x-2)+\beta(y-0)+\dfrac{1}{2}\beta(z-0)=0 \iff 2\beta x+\beta y+\dfrac{1}{2}\beta z-4\beta=0 \iff 4x+2y+z-8=0$.

   On prendra pour la suite comme vecteur normal au plan $\overrightarrow{n}\,(4\,;\,2\,;\,1)$

   b. $\text{D}(0\,;\,0\,;\,1)\in\text{PQR} \iff 4\times 0+2\times 0+1-8=0$, ce qui est faux. D n'appartient pas au plan PQR.

3. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{\text{DH}}$ est normal au plan PQR, donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$. On a donc :

   $$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{DH}) \iff \overrightarrow{\text{D}M}=\alpha\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-0 &=& 4\alpha\\ y-0 &=& 2\alpha\\ z-1 &=& 1\alpha\end{array}\right. \iff$$

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4\alpha\\ y &=& 2\alpha\\ z &=& \alpha+1\end{array}\right.$$ qui est un système d'équations paramétriques de la droite (DH).

   b. Le point H appartient à la droite précédente et au plan PQR. Ses coordonnées vérifient donc :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4\alpha\\ y &=& 2\alpha\\ z &=& \alpha+1\\ 4x+2y+z-8=0 & & \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4\alpha\\ y &=& 2\alpha\\ z &=& \alpha+1\\ 16\alpha+4\alpha+\alpha+1-8 &=& 0\end{array}\right.$$

   $$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4\alpha\\ y &=& 2\alpha\\ z &=& \alpha+1\\ 21\alpha &=& 7\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{4}{3}\\ y &=& \frac{2}{3}\\ z &=& \frac{4}{3}\\ \alpha &=& \frac{1}{3}\end{array}\right.$$

c. On a $\overrightarrow{\text{PH}}\left(\frac{4}{3}-2\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\right)$ soit $\overrightarrow{\text{PH}}\left(-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\right)$ et $\overrightarrow{\text{PR}}\,(-1\ ;\ 1\ ;\ 2)$.

On voit que $\overrightarrow{\text{PH}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{PR}}$ ce qui signifie que H appartient à la droite (PR) et a pour abscisse $\frac{2}{3}$ si le repère est (P, R).

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Question A

Proposition 1 : on a $\binom{4}{2} = 6$ possibilités de tirer 2 boules noires et $\binom{3}{2} = 3$ possibilités de tirer deux rouges et le nombre de possibilités de tirer deux boules parmi sept est $\binom{7}{2} = 21$.

D'où $P(\text{A}) = \frac{6+3}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$. La proposition A est vraie.

Proposition 2 : il faut tirer une rouge et une noire.

On a $\binom{4}{1} = 4$ possibilités de tirer une noire et $\binom{3}{2} = 3$ de tirer une rouge.

On a donc $P(\text{B}) = \frac{4\times 3}{21} = \frac{4}{7}$. La proposition 2 est fausse.

Question B

Proposition 3

A et B sont indépendants signifie que $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$;

On sait d'autre part que $P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B)$.

On en déduit que $P(A)\times P(B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B) \iff P(\text{B})[P(A)-1] = P(A)-P(A\cup B) \iff P(B) = \frac{P(A)-P(A\cup B)}{P(A)-1}$ (car $P(A)\neq 1$. Soit avec les valeurs numériques :

$P(B) = \frac{\frac{2}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}-1} = \frac{\frac{8-15}{20}}{\frac{2-5}{5}} = \frac{-\frac{7}{20}}{-\frac{3}{5}} = \frac{7}{20}\times\frac{5}{3} = \frac{7}{12}$. La proposition 3 est vraie.

Proposition 4

On a $P\left(\overline{A\cup C}\right) = 1-P(A\cup C) = 1-[P(A)+P(C)-P(A\cap C)] = 1-P(A)-P(C)+P(A\cap C) = 1-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10} = \frac{10-4-5+1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. La proposition 4 est fausse.

Question C

Proposition 5 On sait que $P(X=k) = \binom{4}{k}p^k(1-p)^{4-k}$.

Donc $P(X=1) = \binom{4}{1}p^1(1-p)^{4-1} = 4p(1-p)^3$;

$P(X=0) = \binom{4}{0}p^0(1-p)^{4-0} = (1-p)^4$.

Donc $P(X=1) = 8P(X=0) \iff 4p(1-p)^3 = 8(1-p)^4 \iff 4p = 8(1-p) \iff 12p = 8 \iff p = \frac{2}{3}$. La proposition 5 est vraie.

Proposition 6 Avec $p = \frac{1}{5}$:

$P(X=1) = 4p = \frac{4}{5}$ et $P(X=0) = 1-p = 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. La proposition 6 est vraie.

Question D

Proposition 7

La probabilité d'avoir une durée de vie inférieure à 10 ans est $\displaystyle\int_0^{10} 0,07\text{e}^{-0,07x}\,\text{d}x = \left[-\text{e}^{-0,07x}\right]_0^{10} = -\text{e}^{-0,7}+1$.
La probabilité contraire est donc $\text{e}^{-0,7} \approx 0,496 \approx 0,50$ à 10^{-2} près. La proposition 7 est vraie.
Proposition 8
La loi est une loi de probabilité sans vieillissement : la probabilité cherchée est donc la même que la précédente soit 0,5 à 10^{-2} près. La proposition 8 est vraie.

EXERCICE 3 **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

1. **a.** $a' = \text{i}+\text{i}-\dfrac{1}{\text{i}} = 2\text{i}+\text{i} = 3\text{i}$;

$b' = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}+\text{i}-\dfrac{1}{\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}\text{i}-\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}+\text{i}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i} = 2\text{i}.$

b. Cf. la figure plus bas.

c. $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{-\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}}{2\text{i}-\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\text{i}}{2\text{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\text{i}} = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\text{i}}{\frac{3}{2}\text{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\text{i}\right)\left(-\frac{3}{2}\text{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\text{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\text{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} =$

$\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\text{i}}{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{i}.$

d. On sait que $\arg\left(\dfrac{-b}{b'-b}\right) = \left(\overrightarrow{\text{BB}'},\,\overrightarrow{\text{BO}}\right) = \arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

$\left(\overrightarrow{\text{BB}'},\,\overrightarrow{\text{BO}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ signifie que le triangle OBB′ est rectangle en B.

2. **a.** $z^2+\text{i}z-1 = \left(z+\dfrac{1}{2}\text{i}\right)^2+\dfrac{1}{4}-1 = \left(z+\dfrac{1}{2}\text{i}\right)^2-\dfrac{3}{4} = \left(z+\dfrac{1}{2}\text{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\dfrac{1}{2}\text{i}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$

b. On cherche les points M tels que $F(M) = \text{O} \iff z+\text{i}+\dfrac{1}{z} = 0 \iff \dfrac{z^2+\text{i}z+1}{z} = 0 \iff z^2+\text{i}z+1$ (car $M \neq \text{O}$), soit d'après la question précédente si

$$\left\{\begin{array}{rcl} z+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i} & = & 0\\ & \text{ou} & \\ z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i} & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\text{i}\\ & \text{ou} & \\ z & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\text{i}\end{array}\right.$$

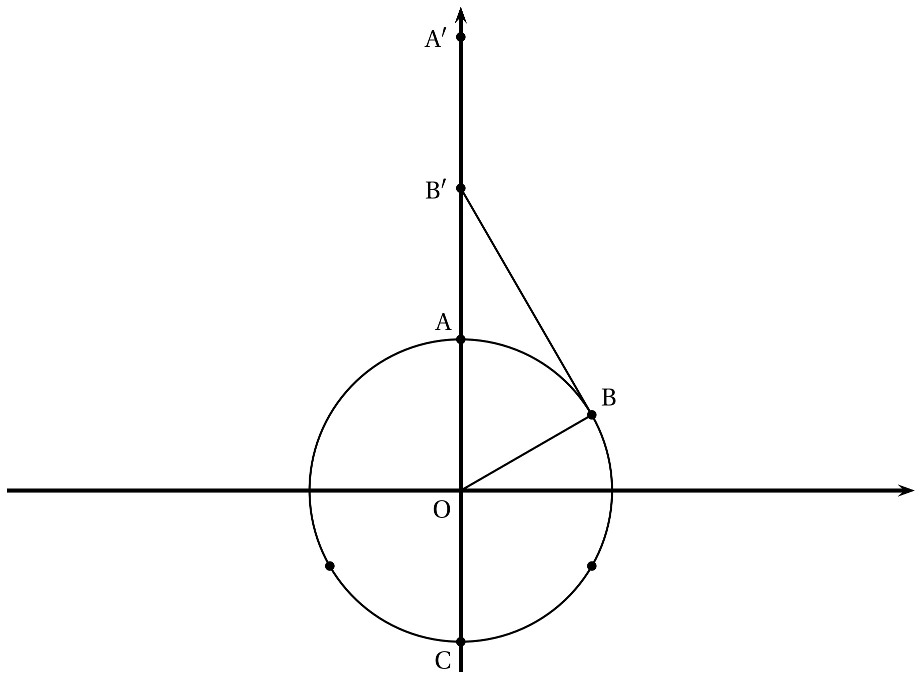
c. Pour les deux points trouvés leurs coordonnées vérifient :
$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4} = 1 = 1^2$. Leur module est égal à 1 : les deux points de (E) appartiennent bien au cercle unitaire (Γ).

3. **a.** Si $z = \text{e}^{\text{i}\theta}$ alors $z' = \text{e}^{\text{i}\theta}+\text{i}-\text{e}^{-\text{i}\theta} = \cos\theta+\text{i}\sin\theta+\text{i}-\cos\theta+\text{i}\sin\theta = 2\text{i}\sin\theta+\text{i} = (2\sin\theta+1)\text{i}$.

b. Si M a pour affixe $z = \text{e}^{\text{i}\theta}$, cela signifie qu'il appartient au cercle (Γ) ; on vient de trouver que l'affixe de son image est égale à $(2\sin\theta+1)\text{i}$ qui est un imaginaire pur. Donc M' appartient à l'axe des ordonnées.

De plus $-1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1 \Rightarrow -2 \leqslant 2\sin\theta \leqslant 2 \Rightarrow -1 \leqslant 2\sin\theta+1 \leqslant 3$.

Conclusion : l'ordonnée de M' est comprise entre -1, ordonnée du point C et 3 ordonnée du point A′, donc $M' \in [\text{A}'\text{C}]$.



EXERCICE 4 **7 points**

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f_0(x) = -x\ln x$.

1. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -nx = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x\ln x = -\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. On a $f_0(x) = -x\ln x$; produit de fonctions dérivables elles est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et
   $f_0'(x) = -\ln x - x \times \dfrac{1}{x} = -\ln x - 1$.
   Or $-\ln x - 1 \geqslant 0 \iff \ln x \leqslant -1 \iff nx \leqslant \ln \mathrm{e}^{-1} \iff x \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.
   Donc sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right]$, $f_0'(x) \geqslant 0$, $f_0'\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = 0$ et sur $\left]\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$, $f_0'(x) < 0$. Donc croissance puis décroissance ce qui correspond bien au dessin donné.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

1. Comme $f_n(x) = f_0(x) - nx$, $f_n'(x) = f_0'(x) - n = -\ln x - 1 - n$.
2. **a.** La courbe a un extremum quand la dérivée de la fonction s'annule soit si $-\ln x - 1 - n = 0 \iff \ln x = -n - 1 \iff \ln x = \ln \mathrm{e}^{-n-1} \iff x = \mathrm{e}^{-n-1}$.
   Conclusion : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la courbe $(\mathcal{C}_n)$ a un seul extremum : le point d'abscisse e^{-n-1}.

   b. On a $f_n\left(\mathrm{e}^{-n-1}\right) = -n\mathrm{e}^{-n-1} - \mathrm{e}^{-n-1}\ln\left(\mathrm{e}^{-n-1}\right) = -n\mathrm{e}^{-n-1} - (-n-1)\mathrm{e}^{-n-1} = -n\mathrm{e}^{-n-1} + n\mathrm{e}^{-n-1} + \mathrm{e}^{-n-1} = \mathrm{e}^{-n-1}$.
   Pour chaque point A_n, l'ordonnée est égale à l'abscisse, donc A_n appartient à la droite d'équation $y = x$.

   c. Cf. la figure
3. **a.** $(\mathcal{C}_n)$ coupe l'axe des abscisses si et seulement si $-nx - x\ln x = 0 \iff -x(n + \ln x) = 0 \iff n + \ln x = 0$ (car $x \neq 0$) $\iff \ln x = -n \iff \ln x = \ln \mathrm{e}^{-n} \iff x = \mathrm{e}^{-n}$ (par croissance de la fonction ln).

   b. La tangente à $(\mathcal{C}_n)$ au point B_n a un coefficient directeur égal à
   $f_n'\left(\mathrm{e}^{-n}\right) = -n - 1 - \ln \mathrm{e}^{-n} = -n - 1 - (-n) = -1$. Ce coefficient est indépendant de n et donne une pente de 45 °avec l'axe des abscisses.

c. Cf. la figure

Partie C : Calculs d'aires

1. Les droites verticales qui limitent les domaines correspondent respectivement au maximum de la fonction et à l'abscisse du point de la courbe qui appartient à l'axe des abscisses.

2. **a.** Posons $\left\{\begin{array}{lllll} u' & = & x & u & = \dfrac{x^2}{2} \\ v & = & \ln x & v' & = \dfrac{1}{x}\end{array}\right.$

Toutes les fonctions étant continues on peut intégrer par parties et
$\displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} x\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\ln x \times \dfrac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} - \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \dfrac{x}{2} = \left[\ln x \times \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2\mathrm{e}^2} + \dfrac{1}{4\mathrm{e}^2} = \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{-2} - \dfrac{1}{4}$.

b. On en déduit $I_0 = \displaystyle\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} -x\ln x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4\mathrm{e}^2}$.

c. Dans une homothétie les aires sont multipliées par le carré du rapport soit ici $\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{-2}$.
On a donc $I_1 = I_0 \times \mathrm{e}^{-2}$;
$I_2 = I_1 \times \mathrm{e}^{-2} = I_0\mathrm{e}^{-4}$.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise à la fin de l'épreuve

Exercice 4