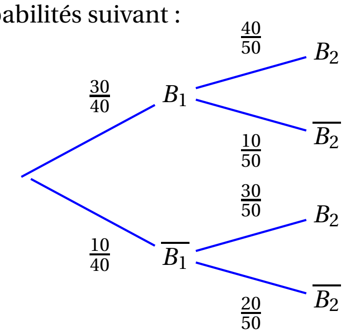
Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat S (obligatoire) Polynésie ∾ septembre 2008

Exercice 1 **4 points**

1. Dans cette question, on prend $n = 10$.

   a. On a l'arbre de probabilités suivant :



   $p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) = \dfrac{30}{40} \times \dfrac{40}{50} = \dfrac{30}{50} = \dfrac{3}{5} = 0,6.$

   On calcule de même $p\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = p\left(\overline{B_1}\right) \times p_{\overline{B_1}}(B_2) = \dfrac{30}{50} \times \dfrac{10}{40} = \dfrac{3}{20} = 0,15.$

   D'après la loi des probabilités totales $p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) + p\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{12+3}{20} = \dfrac{15}{20} = \dfrac{3}{4} = 0,75.$

   b. On a $p_{B_2}(B_1) = \dfrac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{5} = 0,8.$

   c. On a $p(A) = p\left(B_1 \cap \overline{B_2}\right) + p\left(\overline{B_1} \cap B_2\right) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{20} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{3}{20} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3.$

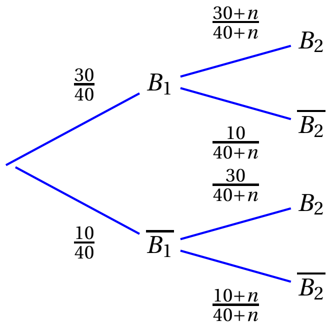
2. **a.** On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 8$ et $p = p(A) = \dfrac{3}{10}$

   La probabilité d'avoir 3 fois l'évènement A est :

$$\binom{8}{3}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(1 - \frac{3}{10}\right)^{8-3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^5 \approx 0,254 \approx 0,25.$$

   b. On a $\mathrm{E} = n \times p = 8 \times \dfrac{3}{10} = \dfrac{12}{5} = 2,4.$

3. On reprend l'arbre précédent, mais en ajoutant n boules :



   Ici $p(A) = \dfrac{30}{40} \times \dfrac{10}{40+n} + \dfrac{10}{40} \times \dfrac{30}{40+n} = \dfrac{15}{40+n}.$

   D'où $p(A) = \dfrac{1}{4} \iff \dfrac{15}{40+n} = \dfrac{1}{4} \iff 60 = 40 + n \iff n = 20.$

EXERCICE 2 **5 points**

1. On a $\text{EJ} = \dfrac{2}{3}$, donc $\text{FJ}^2 = 1^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{13}{9}$.

   De même $\text{BI}^2 = \dfrac{2}{3}$, donc $\text{FI}^2 = 1^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{13}{9}$.

   $\text{FJ}^2 = \text{BI}^2 \Rightarrow \text{FJ} = \text{BI}$, donc le triangle FIJ est isocèle en F. K étant le milieu de [IJ], la droite (FK) médiane du triangle isocèle est aussi hauteur, donc perpendiculaire à (IJ).

   On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.
2. La droite (IJ) est orthogonale à deux droites (FK) et (GK) sécantes du plan (FGK) : elle est donc orthogonale à ce plan.
3. P est le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ), donc la droite (PG) est orthogonale à ce plan et en particulier à toute droite de ce plan : donc (PG) est orthogonale à (IJ).

   De même (IJ) est orthogonale au plan (FGK), donc en particulier (IJ) est orthogonale à (FG).

   Les points F, G, P non alignés définissent un plan (FGP). La droite (IJ) orthogonale à deux droites sécantes de ce plan est orthogonale à ce plan (FGP).
4. **a.** On vient de démontrer que les deux plans (FGK) et (FGP) sont orthogonaux à la droite (IJ). Mais ces deux plans contiennent le point F. Il n'existe qu'un plan contenant un point F et orthogonal à une droite (IJ) donnée, donc F, G, K et P sont coplanaires.

   b. P appartient à la droite (IJ) et comme K appartient lui aussi à la droite (IJ), les points F, P et K appartiennent au plan (FIJ).

   Les points F, P, G et K sont coplanaires donc les points F, P et K appartiennent au plan (FGK).

   Conclusion F, K et P appartiennent aux plans (FIJ) et (FGK) ; ces plans n'étant pas parallèles, leur intersection est une droite qui contient F, K et P ; donc F, K et P sont alignés.

Partie B

1. On a $\overrightarrow{\text{AF}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AE}}$; donc F(1 ; 0 ; 1)

   $\overrightarrow{\text{AG}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}}$; donc G(1 ; 1 ; 1)

   $\overrightarrow{\text{AI}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{BI}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{AD}}$; donc $\text{I}\left(1\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 0\right)$

   $\overrightarrow{\text{AJ}} = \overrightarrow{\text{AE}} + \overrightarrow{\text{EJ}} = \overrightarrow{\text{AE}} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{AD}}$; donc $\text{J}\left(0\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ 1\right)$
2. **a.** G a pour projeté orthogonal sur le plan (FIJ) le point P, donc (GP) est orthogonale à (FIJ).

   N appartient à la droite (GP), donc (GN) est orthogonale à (FIJ) donc à toute droite de ce plan : conclusion : (GN) est orthogonale à (FI) et à (FJ).

   b. On a $\overrightarrow{\text{G}N}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{FI}}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$.

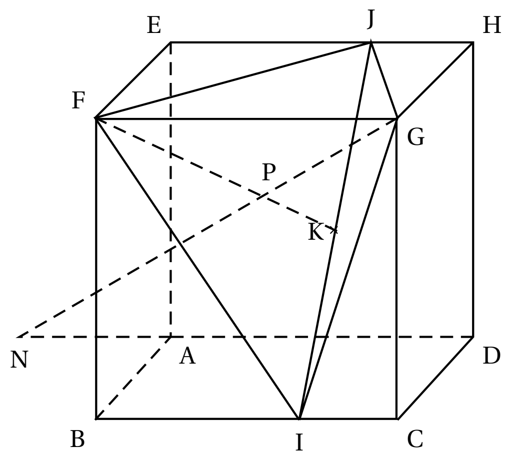
   $\overrightarrow{\text{G}N} \cdot \overrightarrow{\text{FI}} = \dfrac{2}{3}(y-1) + 1 = \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}$.

   $\overrightarrow{\text{FJ}}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{\text{G}N} \cdot \overrightarrow{\text{FJ}} = (x-1) \times (-1) + \dfrac{2}{3}(y-1) = -x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}$.

   c. D'après **2. a.** les deux produits scalaires ci-dessus sont nuls, donc $\dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$ et $-x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = 0$.

   Les cordonnées de N sont donc $\left(0\ ;\ -\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$.

3.



EXERCICE 3 **5 points**

Partie A

1. (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si, pour tout entier naturel n non nul, $t_{n+1} - t_n = 0,24t_{n-1} \iff \lambda^{n+1} - \lambda^n = 0,24\lambda^{n-1} \iff \lambda^2 - \lambda = 0,24$
On a $\lambda^2 - \lambda = 0,24 \iff (\lambda - 0,5)^2 - 0,25 - 24 = 0 \iff (\lambda - 0,5)^2 = 0,7^2 \iff \lambda - 0,5 = 0,7$ ou $\lambda - 0,5 = -0,7 \iff \lambda = 1,2$ ou $\lambda = -0,2$.
Les suites (t_n) appartenant à (E) sont les suites $t_n = 0,2^n$ et $t_n = (-0,2)^n$.

2. u_n doit vérifier $\begin{cases} \alpha(1,2)^0 + \beta(-0,2)^0 & = & 6 \\ \alpha(1,2)^1 + \beta(-0,2)^1 & = & 6,6 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta & = & 6 \\ 1,2\alpha - 0,2\beta & = & 6,6 \end{cases}$
$\Rightarrow 1,2\alpha - 0,2(6 - \alpha) = 6,6 \iff 1,4\alpha = 7,8 \iff \alpha = \dfrac{39}{7}$.
On en déduit que $\beta = 6 - \alpha = 6 - \dfrac{39}{7} = \dfrac{3}{7}$. La suite s'écrit donc : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{39}{7}(1,2)^n + \dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.

3. Comme $-1 < -0,2 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0,2)^n = 0$; d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} (1,2)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Partie B

1. **a.** $f(x) = 1,4x - 0,05x^2 = x(1,4 - 0,05x) =$
$f(x) = -0,05\left(x^2 - 28x\right) = -0,05\left[(x-14)^2 - 196\right]$.
La fonction trinôme f a donc un extremum pour $x = 14$, $f(14) = 9,8$ et cet extremum est un maximum car $-0,05 < 0$.
La fonction est donc croissante sur $]-\infty\,;\,14]$ et décroissante sur $[14\,;\,+\infty[$.

   b. *Initialisation* : $v_0 = 6$, $v_1 = 1,4v_0 - 0,005v_0^2 = 1,4 \times 6 - 0,05 \times 6^2 = 8,4 - 1,8 = 6,6$. C'est vrai au rang 0.
On a bien $0 < v_0 < v_1 \leqslant 8$.
Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 < v_p < v_{p+1} \leqslant 8$.
On a $v_{p+2} = f\left(v_{p+1}\right)$. D'après la question précédente la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;\,14]$; donc $0 < v_p < v_{p+1} \leqslant 8 \Rightarrow$
$0 < f\left(v_p\right) < f\left(v_{p+1}\right) \leqslant f(8) \iff 0 < v_{p+1} < v_{p+2} \leqslant f(8)$. Or $f(8) = 8$. L'hérédité est donc démontrée.
L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang p, il est vrai au rang $p+1$: on a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < v_n < v_{n+1} \leqslant 8$.

2. La question précédente montre que :

— la suite est croissante ;
— la suite est majorée par 8

Conclusion : la suite (v_n) converge vers une limite ℓ inférieure ou égale à 8.

La relation $v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$ entraîne par limite à l'infini (toutes les fonctions étant continues) :

$\ell = 1,4\ell - 0,05\ell^2 \iff 0,4\ell = 0,05\ell^2 \iff \ell = 0$ (impossible car la suite est croissante à partir de 6) ou $\ell = 8$

La suite (v_n) converge vers 8.

EXERCICE 4 **6 points**

Partie A - Étude de fonction f.

1. On a $f(x) = \ln\left[\mathrm{e}^x\left(1 + 2\mathrm{e}^{-2x}\right)\right] = \ln\left(\mathrm{e}^x\right) + \ln\left(1 + 2\mathrm{e}^{-2x}\right) = x + \ln\left(1 + 2\mathrm{e}^{-2x}\right)$.
   On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln\left(2 + \mathrm{e}^{2x}\right)$.
2. Comme $f(x) - x = \ln\left(1 + 2\mathrm{e}^{-2x}\right)$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + 2\mathrm{e}^{-2x}\right) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et que la droite (d) dont une dés équations est $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de plus l'infini.
   Comme $2\mathrm{e}^{-2x} > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1 + 2\mathrm{e}^{-2x}\right) > 0$.
   Conclusion : au voisinage de plus l'infini $(\mathscr{C})$ est au dessus de (d)
3. En utilisant l'écriture de $f(x)$ admise ci-dessus, on obtient de même
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(2 + \mathrm{e}^{2x}\right) = \ln 2$, que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-x) = \ln 2$, c'est-à-dire
   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$.
   Conclusion La droite (d$'$) d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de moins l'infini.
4. La fonction f composée de fonctions dérivables est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x}}$ qui est du signe de $\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{-x}$ car le dénominateur est positif comme somme de termes positifs.
   Posons $X = \mathrm{e}^x$ qui est donc positif; le signe de $f'(x)$ est celui de $X - \dfrac{2}{X} = \dfrac{X^2 - 2}{X}$ qui est positif pour $X > \sqrt{2} \iff \mathrm{e}^x > \sqrt{2} \iff x > \ln\left(\sqrt{2}\right) \iff x > \dfrac{1}{2}\ln 2$ et négatif autrement. La fonction est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,\dfrac{1}{2}\ln 2]$ et croissante sur $[\dfrac{1}{2}\ln 2\,;\,+\infty[$
   Le minimum de la fonction est donc $f\left(\dfrac{1}{2}\ln 2\right) = -\dfrac{1}{2}\ln 2 + \ln\left(2 + \mathrm{e}^{\ln 2}\right)$ (en utilisant l'écriture admise) $= -\dfrac{1}{2}\ln 2 + \ln 4 = -\dfrac{1}{2}\ln 2 + 2\ln 2 = \dfrac{3}{2}\ln 2$.
5. Voir la figure.

Partie B - Encadrement d'une intégrale.

On pose $I = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - x]\,\mathrm{d}x$.

1. Sur l'intervalle $[2\,;\,3]$, $2\mathrm{e}^{-2x} > 0 \Rightarrow 1 + 2\mathrm{e}^{-2x} > 1 \Rightarrow \ln\left(1 + 2\mathrm{e}^{-2x}\right) > \ln 1$, donc $f(x) > x$.
   La fonction $f(x) - x$ étant positive sur $[2\,;\,3]$ l'intégrale est égale à l'aire (en unités d'aire) de la surface limitée par la droite (d), la courbe $\mathscr{C}$ et les verticales d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

2. Soit g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+X) - X$.

La fonction g est dérivable et $g'(x) = \dfrac{1}{1+X} - 1 = \dfrac{-X}{1+X}$ qui est du signe de $-X$ donc négative ; la fonction est décroissante et comme $g(0) = 0$, on en conclut que $g(X) \leqslant 0 \iff \ln(1+X) - X \leqslant 0 \iff \ln(1+X) \leqslant X$.

3. En utilisant le résultat précédent, on obtient $\ln\left(1+2\mathrm{e}^{-2x}\right) \leqslant 2\mathrm{e}^{-2x} \iff f(x) - x \leqslant 2\mathrm{e}^{-2x}$.

Donc l'intégrale étant une aire, $0 \leqslant I \leqslant \displaystyle\int_2^3 2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$

On calcule $\displaystyle\int_2^3 2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-2x}\right]_2^3 = -\mathrm{e}^{-2\times 3} + \mathrm{e}^{-2\times 2} = \mathrm{e}^{-4} - \mathrm{e}^{-6} \approx 0{,}0158$.

Conclusion $0 < I < 0,02$.

Annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 4