∽ Corrigé du baccalauréat Polynésie 2 juin 2021 ∾
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ n° 2

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. • $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10000 + 200 = 9500 + 200 = 9700$.
   • $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9700 + 200 = 9215 + 200 = 9415$.
2. **a.** On démontre par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n > 4000$.

   Initialisation : $u_0 = 10000 > 4000$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;

   Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n > 4000$, alors par produit par $0,95 > 0$, on a $0,95u_n > 0,95 \times 4000$, soit :

   $0,95u_n > 3800$, et en ajoutant 200 à chaque membre :

   $0,95u_n + 200 > 3800 + 200$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 4000$: la relation est vraie au rang $n+1$.

   Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n > 4000$ quel que soit le naturel n.

   b. On sait que si la suite est décroissante et minorée par 4 000, elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 4000$.
3. **a.** Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = 6000$.

   b. Au choix :

   Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,95u_n + 200 - 4000 = 0,95u_n - 3800 = 0,95\left(u_n - \dfrac{3800}{0,95}\right) = 0,95(u_n - 4000) = 0,95v_n$.

   L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

   Méthode 2 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n > 4000$, donc $v_n = u_n - 4000 > 0$.

   On peut donc calculer : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95\left(u_n - \frac{3800}{0,95}\right)}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95(u_n - 4000)}{u_n - 4000} = 0,95$.

   Cette égalité vraie pour tout naturel n, montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

   c. D'après le résultat précédent, on sait que que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $v_n = v_0 \times 0,95^n = 6000 \times 0,95^n$.

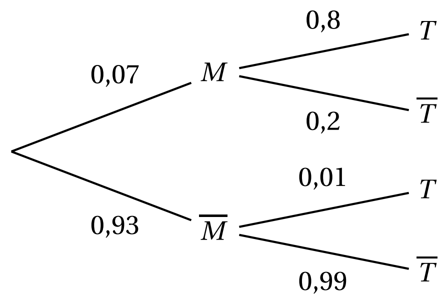
   Or $v_n = u_n - 4000 \iff u_n = v_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000$.

   d. Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 6000 \times 0,95^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4000$ (par somme de limites).

4. u_n est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang n ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4 000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

EXERCICE 2 **5 points**
Commun à tous les candidats

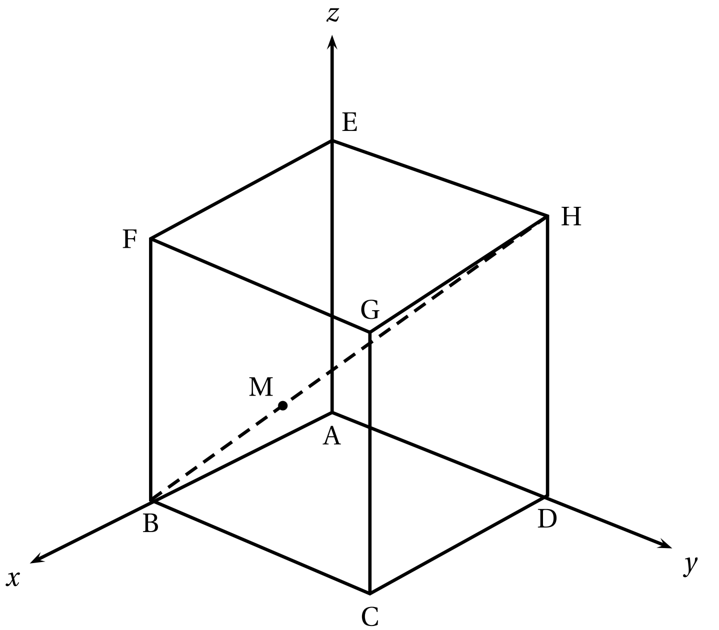
1. On construit un arbre pondéré modélisant la situation proposée :



2. **a.** On a $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.
   b. On a de même $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,056 + 0,0093 = 0,0653$.
3. On calcule $P_T(M) = \dfrac{P(T \cap M)}{P(T)} = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,056}{0,0653} \approx 0,85758$ soit $0,86$ à 10^{-2} près.
4. **a.** X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ avec $p = 0,0653$.
   b. On a $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 =$ $45 \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 \approx 0,1118$, soit $0,11$ à 10^{-2} près.
5. On a $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,0653^0 \times (1 - 0,0653)^n = 1 - 0,9347^n$ et on veut que :
   $P(X \geqslant 1) > 0,99 \iff 1 - 0,9347^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,9347^n$ soit en prenant le logarithme népérien :
   $\ln 0,01 > n \ln 0,9347 \iff \dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} < n$.
   Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \approx 68,2$.
   Il faut donc tester au moins 69 personnes au minimum.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats



1. Dans le repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$, on a
B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1), H(0 ; 1 ; 1).

2. **a.** [EG], [GD] et [ED] sont les hypoténuses de triangles rectangles isocèles de côté 1, donc EG = GD = ED = $\sqrt{2}$: le triangle EGD est équilatéral.

b. Puisque $c = \sqrt{2}$, on a $\mathscr{A}(\text{EGD}) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. On a $\overrightarrow{\text{BH}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\text{BM}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{BH}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{\text{M}}-1\\y_{\text{M}}-0\\z_{\text{M}}-0\end{pmatrix}$.

On a donc : $x_{\text{M}} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$; $y_{\text{M}} = \dfrac{1}{3}$; $z_{\text{M}} = \dfrac{1}{3}$.

Conclusion : M a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.

4. **a.** On a $\overrightarrow{\text{EG}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$: donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{EG}} = -1+1+0 = 0$:

$\overrightarrow{\text{ED}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$: donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{ED}} = 0+1-1 = 0$.

Conclusion : $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : c'est un vecteur normal à ce plan.

b. On sait qu'un plan d'équation $ax+by+cz+d = 0$ a un vecteur normal de coordonnées $(a\,;\,b\,;\,c)$, donc :

$P(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{EGD}) \iff -x+y+z+d = 0$.

Comme E$(0\,;0\,;1)\in$ (EGD) $\iff 0+0+1+d=0 \iff d=-1$.

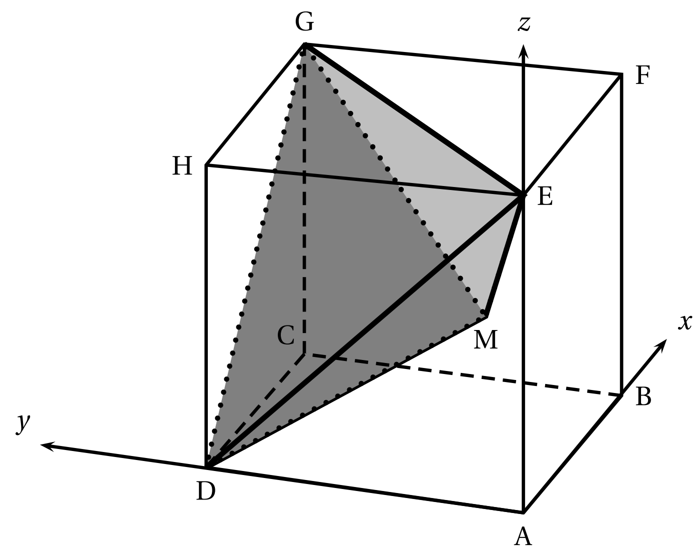
Finalement : le plan (EGD) a pour équation $-x+y+z-1=0$.

c. La droite $\mathscr{D}$ contient M et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ vecteur normal au plan (EGD), donc avec $\overrightarrow{\text{M}P}\begin{pmatrix} x-\frac{2}{3}\\ y-\frac{2}{3}\\ z-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$:

$P(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{D} \iff \overrightarrow{\text{M}P}=t\,\overrightarrow{n}$, avec $t\in\mathbb{R}$, soit :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x-\frac{2}{3} & = & -t\\ y-\frac{1}{3} & = & t\\ z-\frac{1}{3} & = & t\end{array}\right., t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & \frac{2}{3}-t\\ y & = & \frac{1}{3}+t\\ z & = & \frac{1}{3}+t\end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



a. On a vu que la droite $\mathscr{D}$ contient M et est perpendiculaire au plan (EBD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M. Le pied de cette hauteur K appartient donc à $\mathscr{D}$ et au plan (EGD) ; ses coordonnées vérifient donc les équations :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & \frac{2}{3}-t\\ y & = & \frac{1}{3}+t\\ z & = & \frac{1}{3}+t\\ -x+y+z-1 & = & 0\end{array}\right. \Rightarrow -\left(\frac{2}{3}-t\right)+\frac{1}{3}+t+\frac{1}{3}+t-1=0 \iff 3t=1 \iff t=\frac{1}{3}.$$

En remplaçant t par $\frac{1}{3}$ dans l'équation paramétrique de $\mathscr{D}$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & \frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\\ y & = & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\\ z & = & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{array}\right.$$

Conclusion : K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

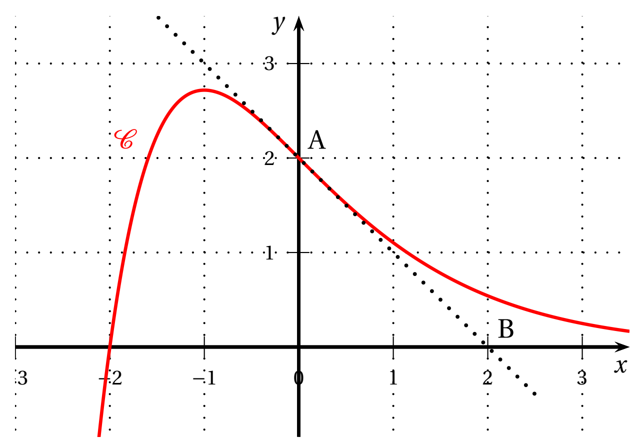
b. On en déduit $\overrightarrow{\text{KM}}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

D'où $\text{KM}^2 = \dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{3}{9}$; on en déduit KM$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Comme $\mathscr{A}(\text{EGD}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, le volume de la pyramide GEDM est : $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{3}=\dfrac{1}{6}$.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

EXERCICE A



Partie 1

1. • A a pour ordonnée $f(0) = 2$;
   • Le nombre dérivé $f'(0) = \dfrac{y_\text{B}-y_\text{A}}{x_\text{B}-x_\text{A}}=\dfrac{0-2}{2-0}=\dfrac{-2}{2}=-1$.
2. La fonction f semble convexe sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle : $y' = -y + \text{e}^{-x}$.

1. On sait que les solutions de l'équation (H) : $y' = -y$ sont les fonctions $x \longmapsto K\text{e}^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
2. Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions

$$x \longmapsto x\text{e}^{-x} + K\text{e}^{-x} = (x+K)\text{e}^{-x},\ K \in \mathbb{R}.$$

3. Avec $f(x) = (x+K)\text{e}^{-x}$ et $f(0) = 2$, on a : $(0+K)\text{e}^{-0} = 2 \iff K = 2$.
Conclusion : $f(x) = (x+2)\text{e}^{-x}$.

Partie 3

1. **a.** Puisque f est solution de l'équation différentielle (E) ; on a donc
$f'(x) = -f(x) + \text{e}^{-x} = -(x+2)\text{e}^{-x} + \text{e}^{-x} = \text{e}^{-x}(-x-2+1) = (-x-1)\text{e}^{-x}$.

b. Comme quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\text{e}^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x-1$. Donc :
$-x-1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$;
$-x-1 < 0 \iff -1 < x \iff x > -1$;
$-x-1 = 0 \iff -1 = x$.
La fonction est donc croissante sur $]-\infty~;~-1[$, décroissante sur $]-1~;~+\infty[$ et a donc un maximum $f(-1) = (-1+2)\text{e}^{-(-1)} = \text{e}$.

2. **a.** De $f'(x) = -f(x) + \text{e}^{-x}$, on obtient en dérivant :
$f''(x) = -f'(x) - \text{e}^{-x} = -(-x-1)\text{e}^{-x} - \text{e}^{-x} = \text{e}^{-x}(x+1-1) = x\text{e}^{-x}$.

b. D'après le résultat précédent sur $[0~;~+\infty[$, $x \geqslant 0$ et $\text{e}^{-x} > 0$, donc le produit $x\text{e}^{-x} \geqslant 0$: la dérivée seconde est positive, la fonction f est convexe sur $[0~;~+\infty[$.

EXERCICE B

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1~;~4]$ par : $f(x) = -30x + 50 + 35\ln x$.

1. **a.** Sur l'intervalle $[1~;~4]$, $f'(x) = -30 + \dfrac{35}{x} = \dfrac{-30x+35}{x} = \dfrac{35-30x}{x}$.

b. Puisque $1 \leqslant x \leqslant 4$, $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur
$35 - 30x = 5(7-6x)$ donc du facteur $7-6x$.
$7-6x > 0 \iff 7 > 6x \iff \dfrac{7}{6} > x \iff x < \dfrac{7}{6}$;
$7-6x < 0 \iff 7 < 6x \iff \dfrac{7}{6} <> x \iff x > \dfrac{7}{6}$;
$7-6x = 0 \iff 7 = 6x \iff \dfrac{7}{6} = x \iff x = \dfrac{7}{6}$.

c. La fonction f est donc croissante sur $\left[1~;~\dfrac{7}{6}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{7}{6}~;~4\right]$ et a donc un maximum : $f\left(\dfrac{7}{6}\right) = -30 \times \dfrac{7}{6} + 50 + 35\ln\dfrac{7}{6} = -35 + 50 + 35\ln\dfrac{7}{6} = 15 + 35\ln\dfrac{7}{6} \approx 20,4$.

2. f décroit sur $\left[\dfrac{7}{6}~;~4\right]$ de $f\left(\dfrac{7}{6}\right) = 15 + 35\ln\dfrac{7}{6} \approx 20,4$ à $f(4) = -120 + 50 + 35\ln 4 = 35\ln 4 - 70 \approx -21,5$.

x	1	$\frac{7}{6}$	α	4
f	20	$\approx 20,4$	0	$\approx -21,4$

Sur l'intervalle $\left[\dfrac{7}{6}\ ;\ 4\right]$, f est continue et strictement décroissante.

Comme $0 \in \left[f\left(\frac{7}{6}\right)\ ;\ f(4)\right]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un réel unique α de cet intervalle tel que $f(\alpha) = 0$.

- On a $f(2) \approx 14,26$ et $f(3) \approx -1,54$, donc $2 < \alpha < 3$;
- On a $f(2,9) \approx 0,26$ et $f(3,0) \approx -1,54$, donc $2,9 < \alpha < 3,0$;
- On a $f(2,91) \approx 0,09$ et $f(2,92) \approx -0,09$, donc $2,91 < \alpha < 2,92$;
- On a $f(2,914) \approx 0,0013$ et $f(2,915) \approx -0,005$, donc $2,914 < \alpha < 2,915$.

3. On a donc $f(x) \geqslant 0$ sur $[1\ ;\ \alpha]$ et $f(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\ ;\ 4]$.

Partie 2 : Optimisation

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1. 2 500 litres correspondent à $x = 2,5$ et $B(2,5) = -15 \times 2,5^2 + 15 \times 2,5 + 35 \times 2,5 \times \ln 2,5 \approx$ 23,925 4 soit environ 23 925 €.

2. La fonction B est dérivable sur $[1 ; 4]$ et sur cet intervalle :
$B'(x) = -30x + 15 + 35\ln x + 35x \times \dfrac{1}{x} = 50 - 30x + 35\ln x = f(x)$.

3. **a.** D'après la partie 1, $f(x) = B'(x) \geqslant 0$ sur $[1\ ;\ \alpha]$: la fonction B est donc croissante sur $[1\ ;\ \alpha]$.

De même $f(x) = B'(x) \leqslant 0$ sur $[\alpha\ ;\ 4]$: la fonction B est donc décroissante sur $[1\ ;\ \alpha]$.

Conclusion : $B(\alpha)$ est le maximum de la fonction B sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

b. $B(\alpha) = -15\alpha^2 + 15\alpha + 35\alpha\ln\alpha$.

En utilisant la valeur approchée de α trouvée dans la partie 1, on a :

$B(\alpha) \approx -15 \times 2,914^2 + 15 \times 2,914 + 35 \times 2,914 \times \ln 2,914 \approx 25,4201$, soit environ 25 420 € à l'euro près.

Il faut donc que l'entreprise vende 2 914 litres de jus de fruits pour faire un bénéficie maximal.