Corrigé du baccalauréat S Polynésie 12 juin 2015

EXERCICE 1 **3 points**

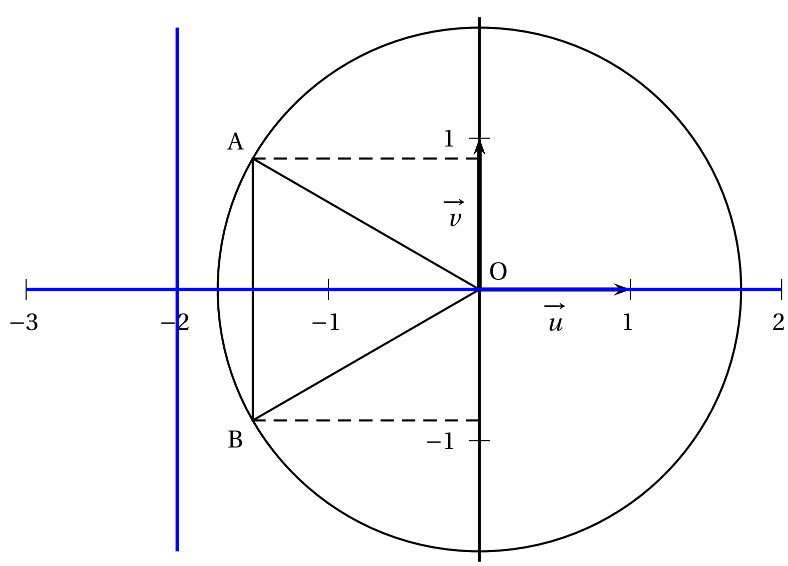
Commun à tous les candidats

1. $\overrightarrow{\text{AI}} = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{\text{AB}} \iff \overrightarrow{\text{AB}} = 6\overrightarrow{\text{AI}} \iff \text{B}(6~;~0~;~0)$;
   $\overrightarrow{\text{AJ}} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{\text{AD}} \iff \overrightarrow{\text{AD}} = 4\overrightarrow{\text{AJ}} \iff \text{D}(0~;~4~;~0)$;
   $\overrightarrow{\text{AK}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AE}} \iff \overrightarrow{\text{AE}} = 2\overrightarrow{\text{AK}} \iff \text{E}(0~;~0~;~2)$.
   Comme $\overrightarrow{\text{AG}} = \overrightarrow{\text{AC}} + \overrightarrow{\text{CG}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AD}} + \overrightarrow{\text{AE}} = 6\overrightarrow{\text{AI}} + 4\overrightarrow{\text{AJ}} + 2\overrightarrow{\text{AK}}$, donc G$(6 ; 4 ; 2)$. On en déduit que $\overrightarrow{\text{IJ}}\,(-1~;~1~;~0)$ et $\overrightarrow{\text{JG}}\,(6~;~3~;~2)$.
   Or $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{IJ}} = -2+2+0 = 0$ et
   $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{JG}} = 12+6-18 = 0$.
   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc normal à deux vecteurs manifestement non colinéaires du plan (IJG) est normal à ce plan.
2. On sait qu'alors une équation du plan (IJG) est :
   $M(x~;~y~;~z) \in \text{(IJG)} \iff 2x+2y-9z+d = 0$.
   En particulier : $\text{I}(1~;~0~;~0) \in \text{(IJG)} \iff 2+0-0+d = 0 \iff d = -2$.
   Une équation du plan (IJG) est : $M(x~;~y~;~z) \in \text{(IJG)} \iff 2x+2y-9z-2 = 0$.
3. On a $\overrightarrow{\text{AF}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{BF}} = \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{AE}}$, donc F$(6 ; 0 ; 2)$.
   Or $M(x~;~y~;~z) \in \text{(BF)} \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{B}M} = t\overrightarrow{\text{BF}} \iff$
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x-6 &=& t(6-6)\\ y-0 &=& t(0-0)\\ z-0 &=& t(2-0)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 6\\ y &=& 0\\ z &=& 2t\end{array}\right.$$
   Donc si $M(x~;~y~;~z) \in \text{(IJG)} \cap \text{(BF)}$ ses coordonnées vérifient le système :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 6\\ y &=& 0\\ z &=& 2t\\ 2x+2y-9z-2 &=& 0\end{array}\right. \Rightarrow 2\times 6+0-9\times 2t-2 = 0 \iff 10-18t = 0 \iff 10 = 18t \iff t = \dfrac{5}{9}.$$
   En remplaçant t par $\dfrac{5}{9}$ dans l'équation de la droite (BF), on obtient :
   $\text{L}\left(6~;~0~;~\dfrac{10}{9}\right)$.
4. La section avec (ABCD) est la droite (IJ).
   La section avec (ABFE) est la droite (IL).
   La section avec (BCGF) est la droite (LG).
   Il reste à trouver l'intersection P du plan (IJG) avec la droite (HD) : comme les plans (ABFE) et (DCGH) sont parallèles, les droites (IL) et (GP) sont parallèles.
   On trace donc la parallèle à (IL) contenant G qui coupe (HD) en P.
   La section est donc le pentagone JILGP (voir à la fin).

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. $M(z)$ est invariant si $M' = M \iff z' = z \iff z^2+4z+3 = z \iff z^2+3z+3 = 0$.
   $\Delta = 3^2 - 4\times 3 = 9 - 12 = -3 = \left(\text{i}\sqrt{3}\right)^2$.
   Cette équation a deux solutions :
   $z_1 = \dfrac{-3+\text{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3-\text{i}\sqrt{3}}{2}$.
   On a $|z_1|^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}+\frac{3}{4} = 3 \Rightarrow |z_1| = \sqrt{3}$.
   Le même calcul donne $|z_2| = \sqrt{3}$.
   On a donc $z_1 = \dfrac{-3+\text{i}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\text{i}\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\text{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$.
   On trouve de la même façon que $z_2 = \sqrt{3}\text{e}^{-\text{i}\frac{5\pi}{6}}$.
2. On a $z_A = z_2$, donc $|z_A| = \text{OA} = |z_2| = \sqrt{3}$.
   De même $z_B = z_1$, donc $|z_B| = \text{OB} = |z_1| = \sqrt{3}$.
   Enfin $\text{AB} = |z_B - z_A| = \left|\dfrac{-3+\text{i}\sqrt{3}}{2} - \left(\dfrac{-3-\text{i}\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\text{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$.
   On a donc $\text{OA} = \text{OB} = \text{AB} = \sqrt{3}$: le triangle OAB est un triangle équilatéral.
3. Soit $M(x\,;\,y)$ et $M'(x'\,;\,y')$ son point associé.
   M' est sur l'axe des réels si $y' = 0$.
   Or on sait que l'affixe du point M est :
   $z^2+4z+3 = (x+\text{i}y)^2+4(x+\text{i}y)+3 = x^2-y^2+2\text{i}xy+4x+4\text{i}y+3 = x^2-y^2+3+\text{i}(2xy+4y)$.
   On a donc $y' = 0 \iff 2xy+4y = 0 \iff 2y(x+2) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0\\ \text{ou} & & \\ x+2 & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0\\ \text{ou} & & \\ x & = & -2\end{array}\right.$
   Conclusion : l'ensemble $\mathcal{E}$ est constitué des points d'ordonnée nulle donc de l'axe des abscisses et des points de la droite verticale dont une équation est $x = -2$ (droites en bleu).
4.



EXERCICE 3 **3 points**
Commun à tous les candidats

1. On sait que $P\left(\mu_1 - 2\sigma_1 \leqslant X_1 \leqslant \mu_1 + 2\sigma_1\right) \approx 0,95$, soit $P(1,53 \leqslant X_1 \leqslant 1,77) \approx 0,95$.
2. **a.** On sait que $P(X_2 \geqslant 170) = 0,5 + P(170 \leqslant X_2 \leqslant 175) \approx 0,5 + 0,18 \approx 0,68$.

   b. Soit F l'évènement « la personne choisie est une femme » et S l'évènement « la personne choisie mesure plus de 1,70 m ». On a $P(F) = 0,52$ et donc $P\left(\overline{F}\right) = 0,48$. La probabilité cherchée est $P_S(F)$.
   De même qu'à la question **2. a.** la probabilité qu'une femme choisi au hasard dans ce pays mesure plus de 1,70 mètre est
   $P(X_1 \geqslant 170) = 0,5 - P(165 \leqslant X_2 \leqslant 170) \approx 0,2$. Soit $P_F(S) \approx 0,2$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(S) = P(S \cap F) + P\left(S \cap \overline{F}\right) = P(F) \times P_F(S) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(S) \approx 0,52 \times 0,2 + 0,48 \times 0,68 \approx 0,4304$.
   Donc $P_S(F) = \dfrac{P(S \cap F)}{P(S)} = \dfrac{P_F(S) \times P(F)}{P(S)} \approx \dfrac{0,2 \times 0,52}{0,4304} \approx \dfrac{0,104}{0,4304} \approx 0,24$.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A Modélisation

1. On sait que le coefficient directeur de la tangente en un point est égal au nombre dérivé de la fonction en ce point. Il faut donc que $f'(1) = 0$.
   Or f est dérivable sur $[1\,;\,8]$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = a\mathrm{e}^{-x} + (ax + b) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(a - ax - b)$.
   Donc $f'(1) = 0 \iff \mathrm{e}^{-1}(a - a - b) = 0 \iff -b\mathrm{e}^{-1} = 0 \iff b = 0$, car $\mathrm{e}^{-1} \neq 0$.
2. Le haut de la courbe est obtenu pour $x = 1$. Or :
   $3,5 < f(1) < 4 \iff 3,5 < a\mathrm{e}^{-1} < 4 \iff 3,5\mathrm{e} < a < 4\mathrm{e}$.
   Or $3,5\mathrm{e} \approx 9,5$ et $4\mathrm{e} \approx 10,9$: le seul entier compris entre ces deux valeurs est $a = 10$.
   On a donc sur $[1\,;\,8]$, $f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

1. En dérivant g comme un produit, on a pour tout réel de $[1\,;\,8]$:
   $g'(x) = 10 \times (-1)\mathrm{e}^{-x} + 10(-x - 1) \times (-1)\mathrm{e}^{-x} = -10\mathrm{e}^{-x}(1 - x - 1) = 10x\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
   g est donc une primitive de f sur $[1\,;\,8]$.
2. Comme $x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, on a $f(x) > 0$ sur $[1\,;\,8]$. Donc l'aire de la surface hachurée est égale en unités d'aire $\left(\text{soit } 1 \times 1 = 1\ \text{m}^2\right)$ à l'intégrale :
   $\displaystyle\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)]_1^8 = g(8) - g(1) = 10(-8 - 1)\mathrm{e}^{-8} - 10(-1 - 1)\mathrm{e}^{-1} = 20\mathrm{e}^{-1} - 90\mathrm{e}^{-8}$.
   D'après les conditions du peintre son devis sera donc d'un montant de :
   $D = 300 + 50\left(20\mathrm{e}^{-1} - 90\mathrm{e}^{-8}\right) \approx 666,37$ €.

Partie C Une contrainte à vérifier

1. La fonction f' est dérivable sur $[1\,;\,8]$ et sur cet intervalle $[1\,;\,8]$:
$f''(x) = 10 \times (-1)\mathrm{e}^{-x} + 10(1-x) \times (-1)10\mathrm{e}^{-x} = 10\mathrm{e}^{-x}(-1-1+x = 10(x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f''(x)$ est celui de $x-2$.
   - Si $1 \leqslant x < 2$, $\;x-2<0$: la fonction f' est donc décroissante sur $[1\,;\,2[$;
   - Si $2 < x \leqslant 8$, $\;x-2>0$: la fonction f' est donc croissante sur $]2\,;\,8[$;
   - Si $x=2$, $f'(2) = -10\mathrm{e}^{-2} \approx -1,35$ est donc le minimum de la fonction f' sur $[1\,;\,8]$.
2. Une équation de la tangente (T_M) au point $M(x\,;\,y)$ est :
$P(X\,;\,Y) \in (T_M) \iff Y - f(x) = f'(x)(X-x)$.
Le point L est le point de cette droite d'ordonnée nulle donc son abscisse$X$ vérifie :
$-f(x) = f'(x)(X-x) \iff X - x = \dfrac{-f(x)}{f'(x)} \iff X = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
Dans le triangle MLP, on $\tan\alpha = \dfrac{PM}{PL} = \dfrac{f(x)}{\left|x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} - x\right|} = \dfrac{f(x)}{\left|-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\right|} =$
$|-f'(x)| = |f'(x)|$.
3. On a vu dans l'étude de la fonction f' que celle-ci décroit de
$f'(1) = 10(1-1)\mathrm{e}^{-1} = 0$ à $-1,35$ puis croissante de $f'(2)$ à $f'(8) = 10(1-8)\mathrm{e}^{-8} = -70\mathrm{e}^{-8} \approx -0,023$.
Le maximum de la fonction $|f'(x)|$ est donc $1,35 \approx \tan 53,47$ °
Cette valeur est bien inférieure à la valeur 55 °. Le toboggan est conforme.

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1.

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur $\ln(2)$
	S prend la valeur v
Traitement :	Pour k variant de 2 à n faire
	$\quad v$ prend la valeur $\ln\left(2-\mathrm{e}^{v}\right)$
	$\quad S$ prend la valeur $S+v$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. D'après les valeurs affichées il semble que la suite (S_n) soit croissante.

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

1. On a $u_1 = \mathrm{e}^{v_1} = \mathrm{e}^{\ln(2)} = 2$.
Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{v_{n+1}} = \mathrm{e}^{\ln\left(2-\mathrm{e}^{-v_n}\right)} = \left(2 - \mathrm{e}^{-v_n}\right) =$
$2 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{v_n}} = 2 - \dfrac{1}{u_n} = u_{n+1}$.

2. D'après le résultat précédent :
$u_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;
$u_3 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$;
$u_4 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$.
3. Démonstration par récurrence :
Initialisation : la relation est vraie pour $n = 4$;
Hérédité : Soit un naturel $n > 4$ tel que $u_n = \frac{n+1}{n}$.
On a $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.
La relation est vraie au rang 4 et si elle est vraie à un rang au moins égal à 5, elle est vraie au rang suivant; d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n > 4$, $u_n = \frac{n+1}{n}$.

Partie C – Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \mathrm{e}^{v_n} \Rightarrow v_n = \ln u_n$.
De la question précédente on peut écrire :
$v_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$.
2. $S_3 = v_1 + v_2 + v_3 = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$.
3. $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \cdots + \ln n - \ln(n+1) + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$.
On a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$. La suite (S_n) est divergente.

EXERCICE 5 **5 points**
Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-18 & -24+30 \\ 12-15 & -18+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.
$A + 2I = \begin{pmatrix} -4+2 & 6 \\ -3 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = A^2$.
2. En partant de l'égalité $A^2 = A + 2I$, on obtient en multipliant chaque membre par A :
$A^3 = A(A+2I) = A^2 + 2A = A + 2I + 2A = 3A + 2I$ et on recommence :
$A^4 = A \times A^3 = A(3A + 2I) = 3A^2 + 2A = 3(A + 2I) + 2A = 5A + 6I$.
3. Démonstration par récurrence :
Initialisation : Pour $n = 0$, $\quad A^0 = I = 0A + 1I = r_0 A + s_0 I$. la relation est vraie au rang 0.
Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel p non nul, tel que $A^p = r_p A + s_p I$.
En multipliant chaque membre par A, on obtient :
$A \times A^p = A\left(r_p A + s_p I\right) \iff A^{p+1} = r_p A^2 + s_p A = r_p(A + 2I) + s_p A =$
$\left(r_p + s_p\right) A + 2r_p I = r_{p+1} A + s_{p+1} I$: la relation est donc vraie au rang $p+1$.
On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$A^n = r_n A + s_n I$.
4. On a pour tout entier naturel n :
$k_{n+1} = r_{n+1} - s_{n+1} = r_n + s_n - 2r_n = s_n - r_n = -(r_n - s_n) = -k_n$.
L'égalité $k_{n+1} = -k_n$ montre que la suite (k_n) est géométrique de raison -1.
On sait qu'alors $k_n = k_0(-1)^n = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$.

5. On a donc $t_1 = r_1 + \dfrac{(-1)^1}{3} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

On sait qu'alors $t_n = \dfrac{2}{3} \times 2^{n-1}$

6. On a donc $r_n = t_n - \dfrac{(-1)^n}{3} = \dfrac{2}{3} \times 2^{n-1} - \dfrac{(-1)^n}{3}$.

Or $s_n = r_n - k_n$, donc

$s_n = \dfrac{2}{3} \times 2^{n-1} - \dfrac{(-1)^n}{3} - (-1)^{n+1} = \dfrac{2}{3} \times 2^{n-1} - \dfrac{(-1)^n}{3} + (-1)^n =$

$s_n = \dfrac{2}{3} \times 2^{n-1} + \dfrac{2}{3} \times (-1)^n$.

7. Finalement de $A^n = r_n A + s_n I = \begin{pmatrix} -4r_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_n & 0 \\ 0 & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4r_n + s_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n + s_n \end{pmatrix}$, on en déduit les quatre coefficients de A^n.

- $-4r_n + s_n = -\dfrac{8}{3}2^{n-1} + \dfrac{4}{3} \times (-1)^n + \dfrac{2}{3}2^{n-1} + \dfrac{2}{3} \times (-1)^n = -2^n + 2 \times (-1)^n$;
- $6r_n = 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n$;
- $-3r_n = -2^n + (-1)^n$;
- $5r_n + s_n = \dfrac{10}{3}2^{n-1} - \dfrac{5}{3} \times (-1)^n + \dfrac{2}{3}2^{n-1} + \dfrac{2}{3} \times (-1)^n = 2^{n+1} - (-1)^n$.

Conclusion : $A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \times (-1)^n & 2^{n+1} - 2 \times (-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}$.

Annexe

À rendre avec la copie

EXERCICE 1