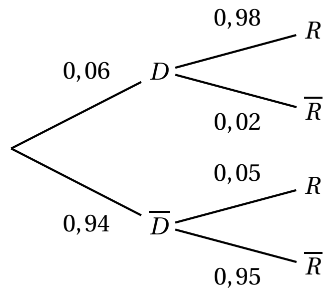
∽ Corrigé du baccalauréat S Polynésie juin 2009 ∾

Exercice 1 — 4 points

1.



2. a. En suivant la deuxième branche : $p\left(\mathrm{D}\cap\overline{R}\right) = p(D)\times p_D\left(\overline{R}\right) = 0,06\times 0,02 = 0,0012$.

b. Il y a erreur de contrôle pour les évènements disjoints $D\cap\overline{R}$ et $\overline{D}\cap R$.
Sa probabilité est donc :
$p\left(D\cap\overline{R}\right)+p\left(\overline{D}\cap R\right) = 0,06\times 0,02+0,94\times 0,05 = 0,0012+0,0470 = 0,0482$.

3. La probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à :
$p\left(D\cap\overline{R}\right)+p\left(\overline{D}\cap\overline{R}\right) = 0,06\times 0,02+0,94\times 0,95 = 0,0012+0,8930 = 0,8942$.

4. a. La variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et de probabilité $p = 0,8942$.

La probabilité que $G = 120-50 = 70$ € est égale à $\binom{4}{4}\times 0,8942^4 \approx 0,6394$;

La probabilité que $G = 60-50 = 10$ € est égale à
$\binom{4}{1}\times 0,8942^3\times(1-0,8942)\approx 0,3026$;

La probabilité que $G = -50$ € est égale à $\approx 1-(0,6394+0,3026)\approx 0,058$.

b. L'espérance mathématique de G est donc égale à :
$70\times 0,6394+10\times 0,3026-50\times 0,058 = 44,758+3,036-2,9\approx 44,89$ €.
Cela signifie qu'en moyenne on peut compter sur un bénéfice de 44,89 € par lecteur produit.

Exercice 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Partie B

1. a. L'affixe ω vérifie $\omega = \mathrm{i}\omega+4+4\mathrm{i} \iff \omega(1-\mathrm{i}) = 4(1+\mathrm{i}) \iff \omega = 4\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = 4\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{1+1} = 2\times 2\mathrm{i} = 4\mathrm{i}$.
Donc $\Omega(4\mathrm{i})$ est invariant par f.

b. On a $\left\{\begin{array}{lll} z' & = & \mathrm{i}z+4+4\mathrm{i}\\ 4\mathrm{i} & = & \mathrm{i}\times 4\mathrm{i}+4+4\mathrm{i}\end{array}\right. \Rightarrow z'-4\mathrm{i} = \mathrm{i}(z-4\mathrm{i})$ par différence.

c. L'égalité précédente montre que f est la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, car $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

2. **a.** Cf. ci dessous.

b. On a $z_{\mathrm{A}'} = \mathrm{i}(4 - 2\mathrm{i}) + 4 + 4\mathrm{i} = 6 + 8\mathrm{i}$.
De même $z_{\mathrm{B}'} = \mathrm{i}(-4 + 6\mathrm{i}) + 4 + 4\mathrm{i} = -2$.

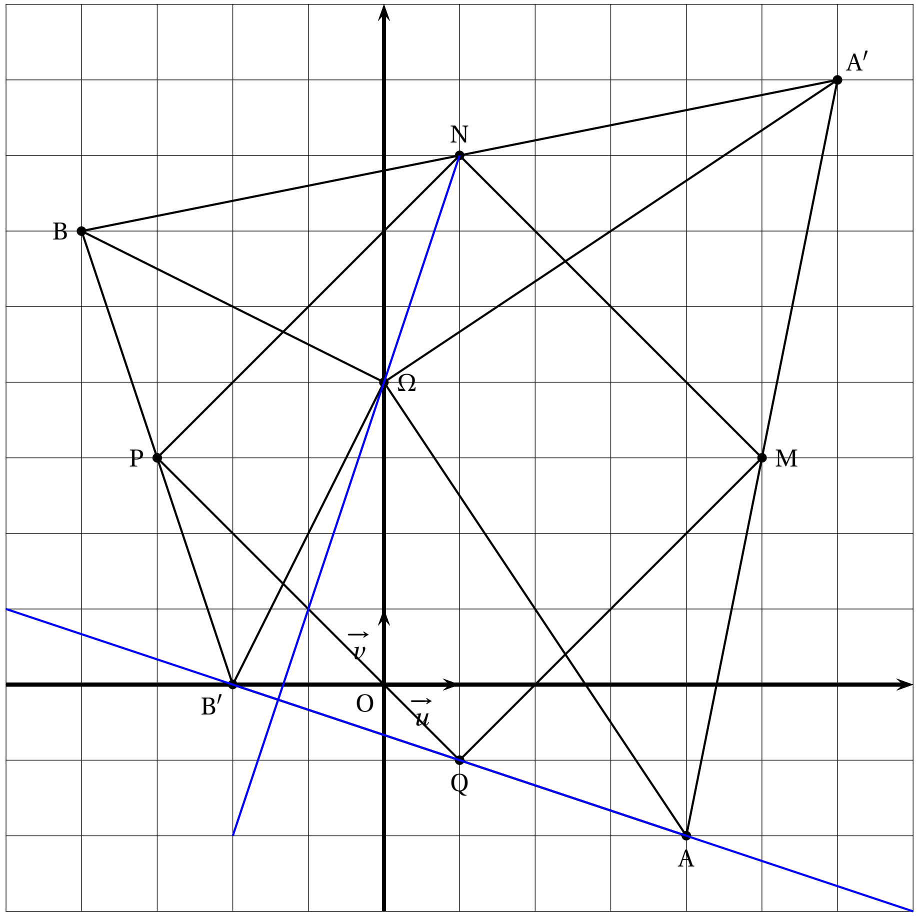
3. **a.** Le milieu M de [AA′] a pour affixe $5 + 3\mathrm{i}$.

b. Le milieu de [MP] a pour coordonnées $(1\,;\,3)$;
Le milieu de [NQ] a pour coordonnées $(1\,;\,3)$. Le quadrilatère MNPQ a ses diagonales qui ont le même milieu : c'est donc un parallélogramme.

c. $\dfrac{q-m}{n-m} = \dfrac{-4-4\mathrm{i}}{-4+4\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \dfrac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$.
Donc $\dfrac{q-m}{n-m} = \mathrm{i} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{MN}},\ \overrightarrow{\mathrm{MQ}} = \dfrac{\pi}{2}\quad [\pi]$, donc (MN) et (MQ) sont perpendiculaires.
D'autre part $\dfrac{q-m}{n-m} = \mathrm{i} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{MN}} = 1 \iff \mathrm{MQ} = \mathrm{MN}$. Le quadrilatère MNPQ est donc un rectangle donc deux côtés consécutifs ont la même longueur : c'est donc un carré.

4. On a $\overrightarrow{\Omega\mathrm{N}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}'} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}'} + \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{A}\Omega} + \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}'}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}'} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}'} + \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}\right)$ car par définition de la rotation $\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}$ et $\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}'}$ sont orthogonaux ainsi que $\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}$ et $\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}'}$.
Donc $\overrightarrow{\Omega\mathrm{N}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}'} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}'} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}'} - \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}\right)$.

Or la rotation conservant les longueurs et les angles, $\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{A}} = \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}'} \cdot \overrightarrow{\Omega\mathrm{A}'}$, donc $\overrightarrow{\Omega\mathrm{N}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}'} = 0$.
Conclusion les droites (ΩN) et (AB′) sont perpendiculaires.



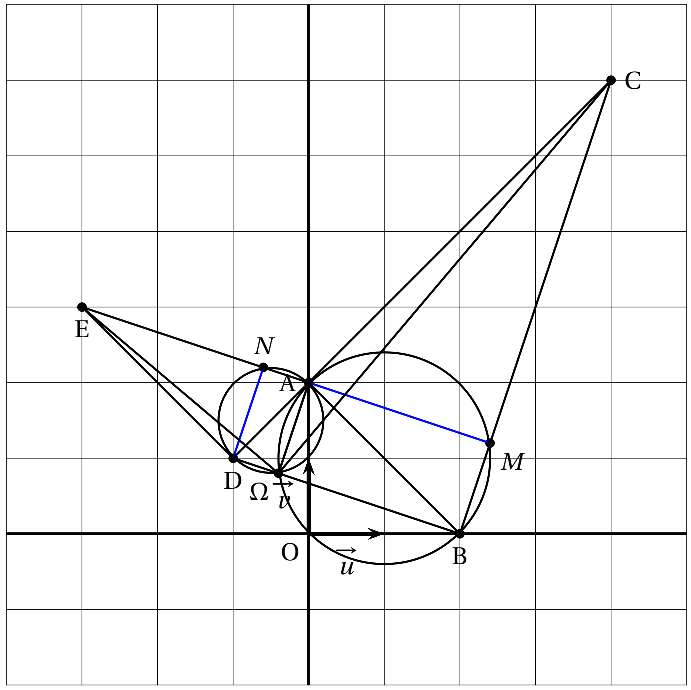
Exercice 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Partie B

1.



2. $\overrightarrow{AB}(2~;~-2)$ et $\overrightarrow{AC}(4~;~4)$; donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 8-8=0$; les vecteurs sont orthogonaux, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, donc ABC est un triangle rectangle en A.

3. **a.** On a vu que l'écriture complexe de l'unique similitude f est $z' = az+b$.

Donc $\left\{\begin{array}{l c l} \text{D} & = & f(\text{A}) \\ \text{A} & = & f(\text{B}) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} -1+\text{i} & = & 2a\text{i}+b \\ 2\text{i} & = & 2a+b\ (2) \end{array}\right. \Rightarrow$

$1+\text{i} = 2a(1-\text{i}) \iff a = \dfrac{1}{2}\dfrac{1+\text{i}}{1-\text{i}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+\text{i})^2}{1+1} = \dfrac{1}{2}\text{i}.$

Il en résulte avec l'équation (2) que $b = 2\text{i}-2\dfrac{1}{2}\text{i} = \text{i}$.

L'écriture complexe de f est donc :

$$z' = \frac{1}{2}\text{i}z+\text{i}.$$

b. Cherchons le point invariant $\Omega(\omega)$ de cette similitude :

$\omega = \dfrac{1}{2}(\text{i})\omega+\text{i} \iff 2\omega = \omega\text{i}+2\text{i} \iff \omega(2-\text{i}) = 2\text{i} \iff \omega = \dfrac{2\text{i}}{2-\text{i}} = \dfrac{2\text{i}(2+\text{i})}{4+1} = \dfrac{2}{5}(-1+2\text{i}).$

On a donc

$\left\{\begin{array}{l c l} z' & = & \dfrac{1}{2}\text{i}z+\text{i} \\ \dfrac{2}{5}(-1+2\text{i}) & = & \dfrac{1}{2}\text{i}(\dfrac{2}{5}(-1+2\text{i}))+\text{i} \end{array}\right. \Rightarrow z'-\dfrac{2}{5}(-1+2\text{i}) = \dfrac{1}{2}\text{i}\left(z-\dfrac{2}{5}(-1+2\text{i})\right).$

Conclusion : le rapport de cette similitude est égale à : $\left|\dfrac{1}{2}\text{i}\right| = \dfrac{1}{2}$ et son angle est égal à $\arg\left(\dfrac{1}{2}\text{i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

c. On a déjà D $= f(\text{A})$ et C $= f(\text{B})$. Cherchons $f(\text{C})$; $z_{f(\text{C})} = \dfrac{1}{2}\text{i}(4+6\text{i})+\text{i} = (2\text{i}-3)+\text{i} = -3+3\text{i}$ qui est bien l'affixe de E.

Donc le triangle DAE est l'image du triangle ABC par la similitude f.

d. Par la similitude les angles sont conservés, donc le triangle DAE est rectangle en A et les dimensions multipliées par le rapport, donc ici divisées par 2.

4. a. L'image par f du cercle (Γ_1) de diamètre [AB] est le cercle de diamètre $[f(\text{A})f(\text{B})]$, donc de diamètre [DA] soit le cercle (Γ_2).
L'image de la droite (BC) est la droite (AE).
Donc M a pour image par f le point commun à (Γ_2) et à (AE) soit le point N.
b. On en déduit que $\left(\overrightarrow{\Omega M},\ \overrightarrow{\Omega N}\right) = \dfrac{\pi}{2}$: le triangle ΩMN est donc rectangle en Ω.
c. M appartient au demi-cercle de diamètre [AB] : le triangle ABM est donc rectangle en M; [AM] est donc la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
Considérons le rapport $\dfrac{M\text{B}}{M\text{C}}$; comme dans la similitude toutes les longueurs sont divisées par 2, la quotient des images à savoir $\dfrac{N\text{A}}{N\text{E}}$ est inchangé. Donc

$$\frac{M\text{B}}{M\text{C}} = \frac{N\text{A}}{N\text{E}} \iff M\text{B} \times N\text{E} = M\text{C} \times N\text{A}$$

Exercice 3 — 5 points

1. a. Soit G le barycentre de $\{(\text{A},\ 2),\ (\text{B}, -1),\ (\text{C},\ 1)\}$. Soit G_1 le barycentre de $\{(\text{A},\ 2),\ (\text{B}, -1)\}$. Par définition $2\overrightarrow{G_1\text{A}} - 1\overrightarrow{G_1\text{B}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\text{O}G_1} = \left(2\overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{OB}}\right)$ qui a pour coordonnées $(2\ ;\ -5\ ;\ 5)$.
G est le barycentre de $\{(G_1,\ 1),\ (\text{C},\ 1)\}$ soit le milieu de $[G_1\text{C}]$ qui a pour coordonnées $(4\ :\ -6\ ;\ 2)$: c'est bien le point E.
b. On a $2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}} = 2\overrightarrow{M\text{E}} - \overrightarrow{M\text{E}} + \overrightarrow{M\text{E}} + 2\overrightarrow{\text{EA}} - \overrightarrow{\text{EB}} + \overrightarrow{\text{EC}} = 2\overrightarrow{M\text{E}}$.
Donc $\left\|2\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 2\sqrt{21} \iff \left\|2\overrightarrow{M\text{E}}\right\| = 2\sqrt{21} \iff \text{E}M = \sqrt{21}$.
Les points M appartiennent donc à la sphère Γ de centre E et de rayon $\sqrt{21}$.
2. a. $\overrightarrow{\text{AB}}(-1\ ;\ 4\ ;\ -2)$ et $\overrightarrow{\text{AD}}(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$ ne sont pas colinéaires; les points A, B et D ne sont pas lignés : ils définissent un plan.
b. $\overrightarrow{\text{EC}}(2\ ;\ -1\ ;\ -3)$. Or
$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{EC}} = -2 - 4 + 6 = 0$ et
$\overrightarrow{\text{AD}} \cdot \overrightarrow{\text{EC}} = 2 - 2 + 0 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{\text{EC}}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD), il est donc orthogonal à ce plan. La droite (EC) est orthogonale au plan (ABD).
c. $\overrightarrow{\text{EC}}(2\ ;\ -1\ ;\ -3)$ étant un vecteur normal au plan, une équation de ce plan est
$2x - 1y - 3z + d = 0$.
$\text{B}(0\ ;\ 3\ ;\ 1) \in (\text{ABD}) \iff -3 - 3 + d = 0 \iff d = 6$.

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{ABD}) \iff 2x - y - 3z + 6 = 0.$$

3. a. $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{EC}) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4 + 2t \\ y & = & -6 - t \\ z & = & 2 - 3t \end{array}\right.$
b. Le point commun à (EC) et au plan (ABD) a ses coordonnées qui vérifient :
$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4 + 2t \\ y & = & -6 - t \\ z & = & 2 - 3t \\ 2x - y - 3z + 6 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow 2(4 + 2t) - (-6 - t) - 3(2 - 3t) + 6 = 0 \iff 14t + 14 = 0 \iff$
$t = -1$
Les coordonnées du point commun à (EC) et au plan (ABD) sont $(2\ ;\ -5\ ;\ 5)$

4. Le centre de la sphère Γ est le point E. Il faut calculer la distance du point E au plan (ABD). Or on a vu que la droite (EC) est perpendiculaire au plan (ABD) au point H$(2\,;\,-5\,;\,5)$. La distance de E au plan (ABD) est donc égale à EH.
Or $\text{EH}^2 = 4+1+9 = 14 \iff \text{EH} = \sqrt{14}$.
La sphère a un rayon de longueur $\sqrt{21}$; comme $\sqrt{14} < \sqrt{21}$, on en déduit que la sphère Γ et le plan (ABD) sont sécants : l'intersection est un cercle. Si M est un point de ce cercle on a $\text{E}M^2 = \text{EH}^2 + \text{H}M^2 \iff 21 = 14 + r^2 \iff r^2 = 7 \iff r = \sqrt{7}$.
L'intersection est un cercle centré en $(2\,;\,-5\,;\,5)$ et de rayon $\sqrt{7}$.

Exercice 4 — 6 points

Partie A

1. f' étant définie et continue sur $[0\,;\,1]$ est intégrable sur cet intervalle et
$\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\right]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2\mathrm{e}} - 0 = \frac{1}{2\mathrm{e}}$.
2. On sait que sur $[0\,;\,1]$, la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus du segment [OA] ; l'intégrale de f sur $[0\,;\,1]$ égale à l'aire de la surface limitée par $(\mathscr{C})$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$, est supérieure à l'aire du triangle OIA (avec I$(1\,;\,0)$). Cette aire est égale à $\dfrac{\text{OI} \times \text{IA}}{2} = \dfrac{1 \times \frac{1}{2\mathrm{e}}}{2} = \dfrac{1}{4\mathrm{e}}$.
Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4\mathrm{e}}$.

Partie B

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}.$$

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
L'axe des abscisses est donc asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.
2. g fonction polynôme est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.
Or $3x^2 + 2x + 1 = 3\left(x^2 + \dfrac{2}{3}x\right) + 1 = 3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{3} + 1 = 3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{2}{3} > \dfrac{2}{3} > 0$
Conclusion $g'(x) > 0 \Rightarrow g$ est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
On a $g(0) = -1$ et $g(1) = 2$. Comme la fonction est croissante sur $[0\,;\,1]$, l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique sur $[0\,;\,1]$, donc sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u = x\mathrm{e}^{-x}$ et $v = x^2+1$. De $u' = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$, $v' = 2x$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, on en déduit que
$f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1-x)\left(x^2+1\right) - x\mathrm{e}^{-x} \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ qui est du signe du numérateur donc de
$\mathrm{e}^{-x}(1-x)\left(x^2+1\right) - x\mathrm{e}^{-x} \times 2x = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2 + 1 - x^3 - x - 2x^2\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(-x^3 - x^2 - x + 1\right)$ ou encore de $-x^3 - x^2 - x + 1 = -\left(x^3 + x^2 + x - 1\right) = -g(x)$.
f' et g ont donc des signes contraires.
b. On a vu que sur $[0\,;\,\alpha]$, $g(x) < 0$, donc $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $[0\,;\,\alpha]$ et sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$, donc $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Il est évident que quel que soit $x \in [0\,;\,+\infty[$, $(x-1)^2 \geqslant 0 \iff x^2 + 1 - 2x \geqslant 0 \iff x^2 + 1 \geqslant 2x \iff \dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{x}{x^2+1} \iff \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. On a $x \geqslant 0 \iff -x \leqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{0}$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\iff \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \iff \dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x}{x^2+1}$.

En posant $u(x) = x^2+1$, u est dérivable et $u'(x) = 2x$.

Donc $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$.

On a donc $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{2n} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{2n} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. (d'après la question **4. a.**)

Or $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\right]_n^{2n} = \frac{1}{2}\left[-\mathrm{e}^{2n} + \mathrm{e}^{-n}\right]$.

Conclusion $u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}\right)$.

c. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-2n} = 0$, on en déduit par application du théorème des « gendarmes » :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

ANNEXE

Exercice 4

Cette page ne sera pas à rendre avec la copie