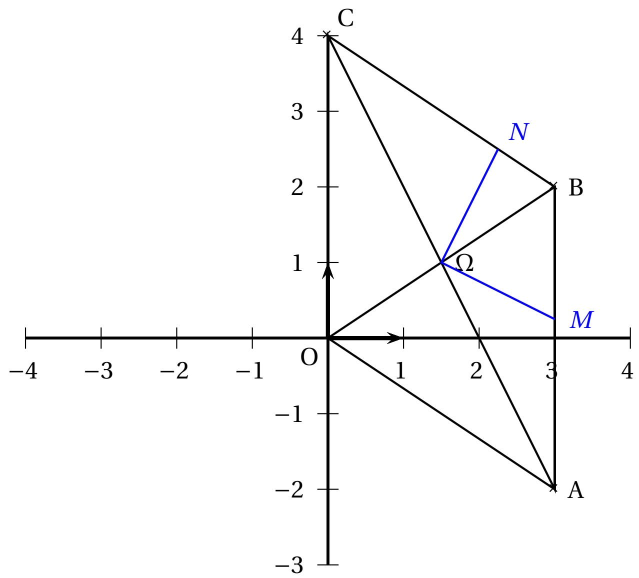
Corrigé du baccalauréat S Polynésie juin 2008

EXERCICE 1 **4 points**

1. $z^2-6z+13=0 \iff (z-3)^2-9+13=0 \iff (z-3)^2+4=0 \iff (z-3)^2=(2\text{i})^2$.
Les solutions sont donc $3+2\text{i}$ et $3-2\text{i}$

2. Figure :



3. On a $\overrightarrow{\text{OC}}(0\ ;\ 4)$ et $\overrightarrow{\text{AB}}(0\ ;\ 4)$,, donc $\overrightarrow{\text{OC}}=\overrightarrow{\text{AB}} \iff$ OABC est un parallélogramme.

4. Le centre de OABC est le milieu de [OB] soit $\Omega\left(\frac{3}{2}\ ;\ 1\right)$.

5. Ω est l'isobarycentre des points A, B, C et O. Donc $\overrightarrow{\text{OA}}+\overrightarrow{\text{OB}}+\overrightarrow{\text{OC}}+\overrightarrow{\text{OC}}=\vec{0}$.
On a donc :
$$\left\|\overrightarrow{M\text{O}}+\overrightarrow{M\text{A}}+\overrightarrow{M\text{B}}+\overrightarrow{M\text{C}}\right\|=12 \iff \left\|4\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega\text{O}}+\overrightarrow{\Omega\text{A}}+\overrightarrow{\Omega\text{B}}+\overrightarrow{\Omega\text{C}}\right\|=12$$
$$\iff \left|4\overrightarrow{M\Omega}\right\|=12 \iff \Omega M=3$$
L'ensemble des points M est donc le cercle de centre Ω et de rayon 3.

6.

a. On a donc $z_M=3+\beta\text{i}$.
On a par définition de la rotation : $z_N-z_\Omega=\text{i}(z_M-z_\Omega) \iff$
$z_N=\frac{3}{2}+\text{i}+\text{i}\left(3+\beta-\frac{3}{2}-\text{i}\right)=\frac{3}{2}+\text{i}+3\text{i}-\beta-\frac{3}{2}-\text{i}=\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}\text{i}$.

b. La droite (BC) a un coefficient directeur de $-\frac{2}{3}$ et contient le point C(0; 4) : une de ses équations est donc $y=-\frac{2}{3}x+4$.
$N\in(\text{BC}) \iff \frac{5}{2}=-\frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}-\beta\right)+4 \iff 15=-4\left(\frac{5}{2}-\beta\right)+24 \iff$
$15=-10+4\beta+24 \iff 4\beta=1 \iff \beta=\frac{1}{4}$.
Dans ce cas : $M\left(3\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ et $N\left(\frac{9}{4}\ ;\ \frac{5}{2}\right)$ (cf. figure)

EXERCICE 2 **4 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 2 ; 3), B(0 ; 1 ; 4), C(−1 ; −3 ; 2), D(4 ; −2 ; 5) et le vecteur $\vec{n}(2~;~-1~;~1)$.

1. a. On a $\overrightarrow{AB}(-1~;~-1~;~1)$, $\overrightarrow{AC}(-2~;~-5~;~-1)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

b. On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -2+1+1 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = -4+5-1 = 0$.
Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est orthogonal à ce plan.

c. $M(x~;~y~;~z) \in (\text{ABC}) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$
$\iff 2(x-1)-1(y-2)+1(z-3) = 0 \iff 2x-y+z-3 = 0$.

Pour $t = -1$, on trouve effectivement les coordonnées de D.
D'autre part un vecteur directeur de cette droite est le le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-2~;~1~;~-1)$, donc $\vec{u} = -\vec{n}$. La droite Δ est donc bien perpendiculaire au plan (ABC).
Le point E appartient donc à la droite (Δ) et au plan (ABC). Ces coordonnées vérifient donc :

$$2(2-2t)-(-1+t)+(4-t)-3 = 0 \iff 6 = 6t \iff t = 1.$$

Les coordonnées de E sont donc (0 ; 0 ; 3).
On a $\overrightarrow{EA}(1~;~2~;~0)$, $\overrightarrow{EB}(0~;~1~;~1)$, $\overrightarrow{EC}(-1~;~-3~;~-1)$.
On a bien $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ qui signifie que E est l'isobarycentre des trois points A, B et C, soit le centre de gravité du triangle (ABC).

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

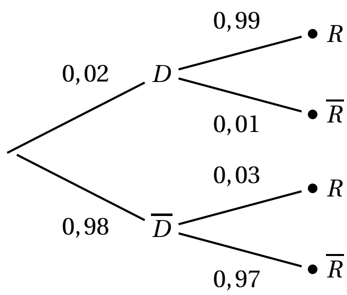
1.
$y = 2$ est une solution évidente de l'équation.
Les solutions de l'équation $y' = -y$ sont les fonctions $y = K\mathrm{e}^{-x}, K \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle initiale sont donc les fonctions : $x \longmapsto 2+Ke^{-x}, K \in \mathbb{R}$.
La solution telle que $f\ln 2) = 1 \iff 2+K\mathrm{e}^{-\ln 2} = 1 \iff \dfrac{K}{\mathrm{e}^{\ln 2}} = -1 \iff \dfrac{K}{2} = -1 \iff K = -2$.
On a donc $f(x) = 2-2\mathrm{e}^{-x}, f(0) = 0, f'(0) = -f(0)+2 = 2$.
L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $Y-0 = 2(X-0) \iff Y = 2X$. Conclusion : l'affirmation est vraie.

2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[A~;~+\infty[$ où A est un réel strictement positif.
Proposition 2 : Faux : contre exemple : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}, g(x) = \mathrm{e}^{x}$ et
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = 1$.

3. Proposition 3 : À la 70e minute, la masse est égale à $0,9^{70}\times 10000 \approx 6,3$ (g). La proposition est fausse.

4. Proposition 4 : On a $p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
A et B sont indépendants, donc $p(A\cap B) = p(A)\times p(B) = 0,4\times 0,4 = 0,16$.
Donc $p(A\cup B) = 0,4+0,4-0,16 = 0,64$. La proposition est fausse.

5. Proposition 5 :Avec des notations évidentes on a l'arbre suivant :



On a donc $p\left(\overline{R}\right) = 0,02 \times 0,01 + 0,98 \times 0,97 = 0,9508$.

Proposition vraie

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. **Proposition 1** : Vraie. On a $1 \times (2n+1) - 2 \times n = 1$: d'après Bezout n et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. **Proposition 2** : Fausse. On a $x \equiv 3 \quad [5] \Rightarrow x^2 + x + 3 \equiv 15 \quad [5]$ soit $x^2 + x + 3 \equiv 0 \quad [5]$.
3. **Proposition 3** : Vraie. On a $N = 1000a + 100b + 10a + 7 = 1010 + 100b + 7$.

   Donc $N \equiv 0 \quad [7] \iff 1010a+100b+7 \equiv 0 \quad [7] \iff 1010a+100b \equiv 0 \quad [7] \iff 101a + 10b \equiv 0 \quad [7] \iff 101a + 101b \equiv 0 \quad 0[7]$, car $91b \equiv 0 \quad [7]$.

   Finalement $101(a+b) \equiv 0 \quad [7]$.

   Comme 101 et 7 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss 7 divise $a+b$.
4. **Proposition 4** : Fausse. Par définition de la similitude, on a :

   $z' - (1-\mathrm{i}) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}[z - (1-\mathrm{i})] \iff z' = 1 - \mathrm{i} + 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2}\right)[z - (1-\mathrm{i})] \iff z' = 1 - \mathrm{i} + \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)[z - (1-\mathrm{i})]$, soit enfin $z' = \left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)z - \sqrt{3} + \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 2\right)$
5. **Proposition 5** : Vraie. Soit un point M d'affixe z. Son symétrique autour de $\left(\mathrm{O} ; \overrightarrow{u}\right)$ a pour affixe $\overline{z}$ et le symétrique de ce point autour du point A a pour affixe z_1 tel que $\overline{z} + z_1 = 2a \iff z_1 = 2a - \overline{z}$.

   Le symétrique de M autour de A a pour affixe le point d'affixe z_2 tel que

   $z + z_2 = 2a$ soit $z_2 = 2a - z$ et le symétrique de ce point autour de $\left(\mathrm{O} ; \overrightarrow{u}\right)$ a pour affixe z_3 tel que $z_3 = \overline{2a - z} = 2\overline{a} - \overline{z}$.

   On a donc $z_1 = z_3 \iff 2a - \overline{z} = 2\overline{a} - \overline{z} \iff 2a = 2\overline{a} \iff a = \overline{a} \iff a \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 4 **7 points**

Partie A

Restitution organisée de connaissances.

Partie B

1. f est la somme de fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$: elle est donc dérivable et

   $f'(x) = 1 + \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = 1 - \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{x}} = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{x} - 1}{1 + \mathrm{e}^{x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{1 + \mathrm{e}^{x}}$.

   Cette dérivée est clairement supérieure à zéro sur $[0 ; +\infty[$, et la fonction f est donc croissante sur $[0 ; +\infty[$.

   Comme $f(0) = 0 + \ln(1+1) = \ln 2 \approx 0,69 > 0$, on a $f(x) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$.

2. **a.** On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{e}^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1+\text{e}^{-x}\right) = \ln 1 = 0$, on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$, ce qui montre que la droite (D) est asymptote à $(\mathcal{C})$ au voisinage de plus l'infini.

b. Comme $f(x) - x = \ln(1+\text{e}^{-x}) > \ln 1 = 0$, ceci montre que la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de (D) quel que soit x.

3.

a. Voir la surface hachurée sur la figure ci-dessous.

b. La fonction g est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $g'(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 = \dfrac{1-1-t}{1+t} = -\dfrac{t}{1+t} < 0$.

La fonction g est décroissante sur $[0 ; +\infty[$ et comme $g(0) = 0$, on a $g(x) \leqslant 0$ sur $[0 ; +\infty[$.

Or $g(t) \leqslant 0 \iff \ln(1+t) - t \leqslant 0 \iff \ln 1 + t) \leqslant t$.

On admettra que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $\dfrac{t}{t+1} \leqslant \ln(1+t)$.

c. On a donc $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$. En posant $t = \text{e}^{-x}$, ce qui est possible puisque $t \geqslant 0$, on obtient l'encadrement :

$$\frac{\text{e}^{-x}}{1+\text{e}^{-x}} \leqslant \ln(1+\text{e}^{-x}) \leqslant \text{e}^{-x}$$

d. En intégrant ces trois fonctions sur l'intervalle $[0 ; 1]$, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{\text{e}^{-x}}{1+\text{e}^{-x}}\,\text{d}x \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+\text{e}^{-x}\right)\,\text{d}x \leqslant \int_0^1 \text{e}^{-x}\,\text{d}x$$

$$[-\ln\left(1+\text{e}^{-x}\right)]_0^1 \leqslant \int_0^1 \ln\left(1+\text{e}^{-x}\right)\,\text{d}x \leqslant \left[-\text{e}^{-x}\right]_0^1$$

$$-\ln\left(1+\text{e}^{-1}\right) + \ln 2 \leqslant \text{I} \leqslant 1 - \frac{1}{\text{e}}.$$

$$\ln\left(\frac{2}{1+\text{e}^{-1}}\right) \leqslant \text{I} \leqslant 1 - \frac{1}{\text{e}}.$$

$$\ln\left(\frac{2\text{e}}{1+\text{e}}\right) \leqslant \text{I} \leqslant 1 - \frac{1}{\text{e}}.$$

e. La calculatrice donne $0,379 \leqslant \text{I}0,633$. Soit à 0,4 près :

$$0,3 \leqslant \text{I} \leqslant 0,7.$$

4. On a $M(x ; x + \ln(1+\text{e}^{-x}))$ et $N(x ; x)$.

Comme on a vu que M est au dessus de N, on a $MN = \ln(1+\text{e}^{-x})$.

Il faut donc résoudre l'inéquation : $\ln(1+\text{e}^{-x}) \leqslant 0,025$ (car l'unité en ordonnées est égale à 2 cm) soit comme la fonction exponentielle est croissante :

$$\text{e}^{\ln(1+\text{e}^{-x})} \leqslant \text{e}^{0,05} \iff$$

$$1+\text{e}^{-x} \leqslant \text{e}^{0,025} \iff$$

$$\text{e}^{-x} \leqslant \text{e}^{0,025} - 1 \iff$$

$$-x \leqslant \ln\left(\text{e}^{0,025} - 1\right) \iff$$

$$x \geqslant -\ln\left(\text{e}^{0,025} - 1\right) \approx 3,67635$$

L'ensemble des valeurs solutions est donc l'intervalle $\left]-\ln\left(\text{e}^{0,025} - 1\right) ; +\infty\right[$.

ANNEXE à rendre avec la copie

EXERCICE 4