Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie
17 novembre 2014

Exercice 1 — 5 points

Commun à tous les candidats

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros.
On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à $0,003$.
On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot. On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1. La variable aléatoire donne le nombre de cônes défectueux et on suppose que les 2 000 tirages sont indépendants les uns des autres. De plus, la probabilité qu'un cône soit défectueux est de $0,003$.

On peut donc dire que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 2000$ et $p = 0,003$.

2. Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.

L'événement « un lot n'est pas échangé » se produit quand le nombre de cônes défectueux est inférieur ou égal à 11, donc correspond à $X \leqslant 11$.

$P(X \leqslant 11) = \displaystyle\sum_{k=0}^{11} P(X = k)$

On calcule les probabilités (arrondies à 10^{-5}) :

k	$P(X = k)$	$P(X \leqslant k)$
0	0,002 46	0,002 46
1	0,014 78	0,017 24
2	0,044 46	0,061 70
3	0,089 10	0,150 80
4	0,133 85	0,284 65
5	0,160 78	0,445 44
6	0,160 86	0,606 30
7	0,137 88	0,744 19
8	0,103 36	0,847 55
9	0,068 84	0,916 39
10	0,041 24	0,957 63
11	0,022 45	0,980 07

Donc la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé est $0,980$ au millième.

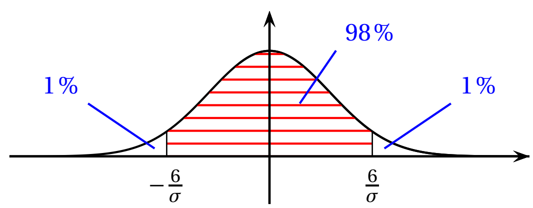
Partie B

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient.
On suppose que Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(110\ ;\ \sigma^2\right)$, d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type σ.
Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle $[104;116]$.
On sait que la probabilité de l'événement « une glace est commercialisable » est 0,98, ce qui signifie que $P(104 \leqslant Y \leqslant 116) = 0,98$.
D'après le cours, on sait que, si Y suit la loi normale de paramètres $\mu = 110$ et σ, alors la loi $Z = \dfrac{Y - 110}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite (de moyenne 0 et d'écart type 1).

$104 \leqslant\ Y \leqslant 116 \iff -6 \leqslant Y - 110 \leqslant 6 \iff -\dfrac{6}{\sigma} \leqslant \dfrac{Y-110}{\sigma} \leqslant \dfrac{6}{\sigma}$ donc

$P(104 \leqslant Y \leqslant 116) = 0,98 \iff P\left(-\dfrac{6}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \dfrac{6}{\sigma}\right) = 0,98$

On peut représenter la situation par le graphique ci-dessous :



On peut en déduire que $P\left(Z \leqslant \dfrac{6}{\sigma}\right) = 0,99$.
On peut le démontrer en utilisant un résultat connu du cours : $P(-t \leqslant Z \leqslant t) = 2P(Z \leqslant t) - 1$.
On cherche donc la valeur t telle que $P(Z \leqslant t) = 0,99$ sachant que la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite ; on trouve à la calculatrice $t \approx 2,326$.

On a donc : $\dfrac{6}{\sigma} \approx 2,236 \iff \dfrac{6}{2,236} \approx \sigma \iff \sigma \approx 2,58$.

Une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre σ telle que la probabilité de l'événement « la glace est commercialisable » soit égale à 0,98 est 2,6.
Vérification
Si Y suit la loi normale de paramètres $\mu = 110$ et $\sigma = 2,6$ alors $P(104 \leqslant Y \leqslant 116) \approx 0,979$.
Si on prend $\sigma = 2,5$ on trouve $P(104 \leqslant Y \leqslant 116) \approx 0,984$.
Enfin en prenant $\sigma = 2,7$ on trouve $P(104 \leqslant Y \leqslant 116) \approx 0,974$.
La valeur approchée à 10^{-1} près de σ qui donne la probabilité la plus proche de 0,98 est $2,6$.

Partie C

Une étude réalisée en l'an 2000 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %.
L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% d'un pourcentage p dans une population de taille n est :

$$I = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

On a $n = 900$ et $p = 0,84$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% du pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces en 2000 est :

$$I = \left[0,84 - 1,96\frac{\sqrt{0,84 \times 0,16}}{\sqrt{900}}\ ;\ 0,84 + 1,96\frac{\sqrt{0,84 \times 0,16}}{\sqrt{900}}\right] \approx [0,816;0,864]$$

En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces, ce qui fait une proportion de $f = \dfrac{795}{900} \approx 0,883$.
Or $f \notin I$ donc on ne peut pas affirmer, au niveau de confiance de 95 %, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre 2000 et 2010.

Exercice 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. **Affirmation 1 : vraie**
   Le point d'affixe $(-1+\text{i})^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.
   Explication
   $z=(-1+\text{i})^{10}=\left((-1+\text{i})^2\right)^5$; $(-1+\text{i})^2=-2\,\text{i}$ donc $z=(-2\,\text{i})^5=-32\,\text{i}^5$
   $\text{i}^2=-1$ donc $\text{i}^4=1$ et donc $\text{i}^5=\text{i}$; on en déduit que $z=-32\,\text{i}$ qui est un imaginaire pur.

2. **Affirmation 2 : fausse**
   Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z-\overline{z}+2-4\,\text{i}=0$ admet une solution unique.
   Explication
   On écrit z sous la forme $a+\text{i}b$ où a et b sont des réels et on résout l'équation (E) : $z-\overline{z}+2-4\,\text{i}=0$
   (E) $\iff a+\text{i}b-(\overline{a+\text{i}b})+2-4\,\text{i}=0 \iff a+\text{i}b-(a-\text{i}b)+2-4\,\text{i}=0$
   $\iff a+\text{i}b-a+\text{i}b+2-4\,\text{i}=0 \iff 2\,\text{i}b+2-4\,\text{i}=0 \iff (2b-4)\,\text{i}=-2$ ce qui est impossible.

3. **Affirmation 3 : vraie**
   $\ln\left(\sqrt{\text{e}^7}\right)+\dfrac{\ln\left(\text{e}^9\right)}{\ln\left(\text{e}^2\right)}=\dfrac{\text{e}^{\ln 2+\ln 3}}{\text{e}^{\ln 3-\ln 4}}$
   Explication
   $\ln\left(\sqrt{\text{e}^7}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\text{e}^7\right)=\dfrac{7}{2}$; $\ln\left(\text{e}^9\right)=9$ et $\ln\left(\text{e}^2\right)=2$ donc $\dfrac{\ln\left(\text{e}^9\right)}{\ln\left(\text{e}^2\right)}=\dfrac{9}{2}$
   Donc $\ln\left(\sqrt{\text{e}^7}\right)+\dfrac{\ln\left(\text{e}^9\right)}{\ln\left(\text{e}^2\right)}=\dfrac{7}{2}+\dfrac{9}{2}=\dfrac{16}{2}=8$
   $\ln 2+\ln 3=\ln(2\times 3)=\ln 6$ donc $\text{e}^{\ln 2+\ln 3}=\text{e}^{\ln 6}=6$; $\ln 3-\ln 4=\ln\dfrac{3}{4}$ donc $\text{e}^{\ln 3-\ln 4}=\text{e}^{\ln\frac{3}{4}}=\dfrac{3}{4}$
   Donc $\dfrac{\text{e}^{\ln 2+\ln 3}}{\text{e}^{\ln 3-\ln 4}}=\dfrac{6}{\frac{3}{4}}=6\times\dfrac{4}{3}=8$

4. **Affirmation 4 : vraie**
   $\displaystyle\int_0^{\ln 3}\frac{\text{e}^x}{\text{e}^x+2}\,\text{d}x=-\ln\left(\frac{3}{5}\right)$
   Explication
   Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=\text{e}^x+2$; cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=\text{e}^x$. De plus cette fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
   Donc l'expression $\dfrac{\text{e}^x}{\text{e}^x+2}$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ qui a pour primitive $\ln(u(x))$. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\text{e}^x}{\text{e}^x+2}$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction F définie par $F(x)=\ln\left(\text{e}^x+2\right)$.
   Donc $\displaystyle\int_0^{\ln 3}\frac{\text{e}^x}{\text{e}^x+2}\,\text{d}x=F(\ln 3)-F(0)$
   $F(\ln 3)=\ln\left(\text{e}^{\ln 3}+2\right)=\ln(3+2)=\ln 5$; $F(0)=\ln\left(\text{e}^0+2\right)=\ln 3$
   $\displaystyle\int_0^{\ln 3}\frac{\text{e}^x}{\text{e}^x+2}\,\text{d}x=\ln 5-\ln 3=-(\ln 3-\ln 5)=-\ln\frac{3}{5}$

5. **Affirmation 5 : fausse**
   L'équation $\ln(x-1)-\ln(x+2)=\ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.
   Explication
   L'expression $\ln(x-1)-\ln(x+2)$ n'existe que si $x-1>0$ et $x+2>0$ donc on va résoudre l'équation $\ln(x-1)-\ln(x+2)=\ln 4$ dans l'intervalle $I=\,]1\,;+\infty[$.

$$\ln(x-1)-\ln(x+2)=\ln 4 \iff \ln\frac{x-1}{x+2}=\ln 4 \iff \frac{x-1}{x+2}=4 \iff \frac{x-1-4(x+2)}{x+2}=0$$
$$\iff \frac{x-1-4x-8}{x+2}=0 \iff \frac{-3x-9}{x+2}=0 \iff x=-3 \text{ et } x\neq -2$$

Mais $-3 \notin I$ donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On donne les points A(1 ; 0 ; −1), B(1 ; 2 ; 3), C(−5 ; 5 ; 0) et D(11 ; 1 ; −2). Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD]. Le point K est défini par $\overrightarrow{\text{BK}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{BC}}$.

1. **a.** Le point I est le milieu de [AB] donc a pour coordonnées $\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{-1+3}{2}\right)=(1;1;1)$.

   Le point J est le milieu de [CD] donc a pour coordonnées $\left(\frac{-5+11}{2}; \frac{5+1}{2}; \frac{0-2}{2}\right)=(3;3;-1)$.

   Le point K est défini par $\overrightarrow{\text{BK}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{BC}}$; le vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$ a pour coordonnées $(-5-1;5-2;0-3)=(-6;3;-3)$ donc $\overrightarrow{\text{BK}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{BC}}$ a pour coordonnées $(-2;1;-1)$.

   Donc $\left\{\begin{array}{l} x_{\text{K}}-x_{\text{B}}=-2\\ y_{\text{K}}-y_{\text{B}}=1\\ z_{\text{K}}-z_{\text{B}}=-1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_{\text{K}}=-2+1\\ y_{\text{K}}=1+2\\ z_{\text{K}}=-1+3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_{\text{K}}=-1\\ y_{\text{K}}=3\\ z_{\text{K}}=2\end{array}\right.$

   Donc le point K a pour coordonnées $(-1;3;2)$.

   b. Les points I, J et K définissent un plan si et seulement si ces trois points ne sont pas alignés. On va donc regarder si les vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{IK}}$ sont colinéaires.

   Le vecteur $\overrightarrow{\text{IJ}}$ a pour coordonnées $(3-1;3-1;-1-1)=(2;2;-2)$.

   Le vecteur $\overrightarrow{\text{IK}}$ a pour coordonnées $(-1-1;3-1;2-1)=(-2;2;1)$.

   Or $x_{\overrightarrow{\text{IJ}}}\times(-1)=x_{\overrightarrow{\text{IK}}}$ et $y_{\overrightarrow{\text{IJ}}}\times(-1)\neq y_{\overrightarrow{\text{IK}}}$; donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$ et $\overrightarrow{\text{IK}}$ ne sont pas colinéaires.

   Les trois points I, J et K définissent un plan.

   c. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(3;1;4)$ est un vecteur normal au plan (IJK) si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

   $\left.\begin{array}{l}\vec{n}.\overrightarrow{\text{IJ}}=3\times 2+1\times 2+4\times(-2)=0 \Longrightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{\text{IJ}}\\ \vec{n}.\overrightarrow{\text{IK}}=3\times(-2)+1\times 2+4\times 1=0 \Longrightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{\text{IK}}\end{array}\right\}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

   Le plan (IJK) est alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\text{IM}}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux.

   Si M a pour coordonnées $(x;y;z)$, le vecteur $\overrightarrow{\text{IM}}$ a pour coordonnées $(x-1;y-1;z-1)$.

   $\overrightarrow{\text{IM}}\perp\vec{n} \iff \overrightarrow{\text{IM}}.\vec{n}=0 \iff 3(x-1)+1(y-1)+4(z-1)=0 \iff 3x+y+4z-8=0$.

   Le plan (IJK) a pour équation $3x+y+4z-8=0$.

2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x+y+4z-8=0$.

   a. La droite (BD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{BD}}$ de coordonnées $(11-1;1-2;-2-3)=(10;-1;-5)$.

   La droite (BD) passe par le point B et a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(10;-1;-5)$ donc elle a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x=1+10t\\ y=2-t\\ z=3-5t\end{array}\right.$ où $t\in\mathbb{R}$

   b. Pour chercher si le plan $\mathscr{P}$ et la droite (BD) sont sécants, on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{r} x = 1+10t\\ y = 2-t\\ z = 3-5t\\ 3x+y+4z-8=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r} x = 1+10t\\ y = 2-t\\ z = 3-5t\\ 3(1+10t)+(2-t)+4(3-5t)-8=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{r} x = 1+10t\\ y = 2-t\\ z = 3-5t\\ 9+9t=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 1-10\\ y = 2+1\\ z = 3+5\\ t=-1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -9\\ y = 3\\ z = 8\\ t=-1\end{array}\right.$$

Donc la droite (BD) et le plan $\mathscr{P}$ sont sécants en un point L de coordonnées $(-9\,;3\,;8)$.

c. Le vecteur $\overrightarrow{\text{BD}}$ a pour coordonnées $(10\,;-1\,;-5)$, et le vecteur $\overrightarrow{\text{LB}}$ a pour coordonnées $(1-(-9)\,;2-3\,;3-8)=(10\,;-1\,;-5)$. Les vecteurs $\overrightarrow{\text{BD}}$ et $\overrightarrow{\text{LB}}$ sont égaux donc le point L est le symétrique du point D par rapport au point B.

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=5-\dfrac{4}{x+2}$.

1. $f'(x)=0-\dfrac{0(x+2)-4\times 1}{(x+2)^2}=\dfrac{4}{(x+2)^2}>0$ sur $[0\,;+\infty[$.
   Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
2. On résout dans $[0\,;+\infty[$ l'équation $f(x)=x$:
   $$f(x)=x \iff 5-\frac{4}{x+2}=x \iff \frac{5(x+2)-4-x(x+2)}{x+2}=0 \iff \frac{5x+10-4-x^2-2x}{x+2}=0$$
   $$\iff \frac{-x^2+3x+6}{x+2}=0 \iff -x^2+3x+6=0 \text{ et } x+2\neq 0$$
   On résout $-x^2+3x+6=0$; $\Delta=9-4\times 6\times(-1)=33>0$.
   Les solutions sont donc $\dfrac{-3-\sqrt{33}}{-2}=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$.
   Cette deuxième solution est négative donc l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ est $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}\approx 4,37$.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.
   Sur la figure de **annexe 1**, on place les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 ; voir page 10.
   On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et converge vers α.
4. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$.
   - *Initialisation* : pour $n=0$, $u_n=u_0=1$ et $u_{n+1}=u_1=f(u_0)=5-\dfrac{4}{1+2}=\dfrac{11}{3}$; de plus $\alpha\approx 4,37$.
     On a $0\leqslant 1\leqslant\dfrac{11}{3}\leqslant\alpha$ ce qui veut dire que la propriété est vraie au rang 0.
   - *Hérédité* : on suppose que quel que soit l'entier $p>0$, $0\leqslant u_p\leqslant u_{p+1}\leqslant\alpha$.
     On sait d'après la question **1.** que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$; donc :
     $0\leqslant u_p\leqslant u_{p+1}\leqslant\alpha \Longrightarrow f(0)\leqslant f(u_p)\leqslant f(u_{p+1})\leqslant f(\alpha)$
     $f(0)=3\geqslant 0$, $f\left(u_p\right)=u_{p+1}$ et $f\left(u_{p+1}\right)=u_{p+2}$.
     De plus, α est solution de l'équation $f(x)=x$ donc $f(\alpha)=\alpha$.
     On a donc $0\leqslant u_{p+1}\leqslant u_{p+2}\leqslant\alpha$; on peut dire que la propriété est vraie au rang $p+1$.
   - La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire ; donc d'après le principe de récurrence la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

b. Pour tout n, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
Pour tout n, $u_n \leqslant \alpha$ donc la suite (u_n) est majorée par α.
Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

a. $S_0 = u_0 = 1$; $S_1 = u_0 + u_1 = 1 + \dfrac{11}{3} = \dfrac{14}{3} \approx 4,67$
$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = S_1 + u_2$; $u_2 = f(u_1) = f\left(\dfrac{11}{3}\right) = \dfrac{73}{17}$ donc $S_2 = \dfrac{14}{3} + \dfrac{73}{17} = \dfrac{457}{51} \approx 8,960$ donc $S_2 \approx 8,96$.

b. On complète l'algorithme donné en annexe 2 pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur; voir page 11.

c. On sait que la suite (u_n) est croissante donc, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$.
Or $u_0 = 1$, donc, pour tout n, $u_n \geqslant 1$ et donc $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \geqslant n+1$.
Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$ donc, d'après les théorèmes de comparaison sur les limites :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$$

Exercice 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère l'algorithme suivant, où A et B sont des entiers naturels tels que $A < B$:

Entrées :	A et B entiers naturels tels que $A < B$
Variables :	D est un entier Les variables d'entrées A et B

Traitement :	Affecter à D la valeur de $B - A$
	Tant que $D > 0$
	    B prend la valeur de A
	    A prend la valeur de D
	        Si $B > A$ Alors
	            D prend la valeur de $B - A$
	        Sinon
	            D prend la valeur de $A - B$
	        Fin Si
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher A

1. On entre $A = 12$ et $B = 14$. On remplit le tableau donné en **annexe**; voir page 12.
   La valeur affichée par l'algorithme est 2.
2. Cet algorithme calcule la valeur du PGCD des nombres A et B.
   En entrant $A = 221$ et $B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1.
   a. On a fait tourner l'algorithme pour $A = 221$ et $B = 331$ donc le PGCD de 221 et 331 est 1 ; ces deux nombres sont donc premiers entre eux.
   D'après le théorème de Bézout, on peut dire qu'il existe des entiers relatifs x et y tels que $221x - 331y = 1$ (équation (E)).
   b. $221 \times 3 - 331 \times 2 = 663 - 662 = 1$ donc le couple $(3~;~2)$ est une solution de (E).
   $$\begin{array}{llcll} \text{(E)} & 221 \times x & - & 331 \times y & = 1 \\ & 221 \times 3 & - & 331 \times 2 & = 1 \\ \hline & 221(x-3) & - & 331(y-2) & = 0 \end{array} \quad \text{par soustraction}$$
   Donc $221(x-3) = 331(y-2)$ et donc 221 divise $331(y-2)$. Or on sait que 221 et 331 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 221 divise $y - 2$.
   On peut donc dire que $y - 2 = 221k$ où $k \in \mathbb{Z}$ et donc que $y = 2 + 221k$.
   De $221(x-3) = 331(y-2)$ on déduit $221(x-3) = 331 \times 221k$ ce qui équivaut à $x - 3 = 331k$; donc $x = 3 + 331k$.
   L'ensemble solution de l'équation (E) est $\left\{\left(3 + 331k; 2 + 221k\right)\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$
3. On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par
   $$u_n = 2 + 221n \text{ et } \left\{\begin{array}{l} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 331 \end{array}\right.$$
   a. La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 331$ et de premier terme $v_0 = 3$; donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 + n \times r = 3 + 331n$.
   b. $u_p = v_q \iff 2 + 221p = 3 + 331q \iff 221p - 331q = 1$
   D'après les questions précédentes, on a : $(p\,,\,q) = (3 + 331k\,,\,2 + 221k)_{k \in \mathbb{Z}}$

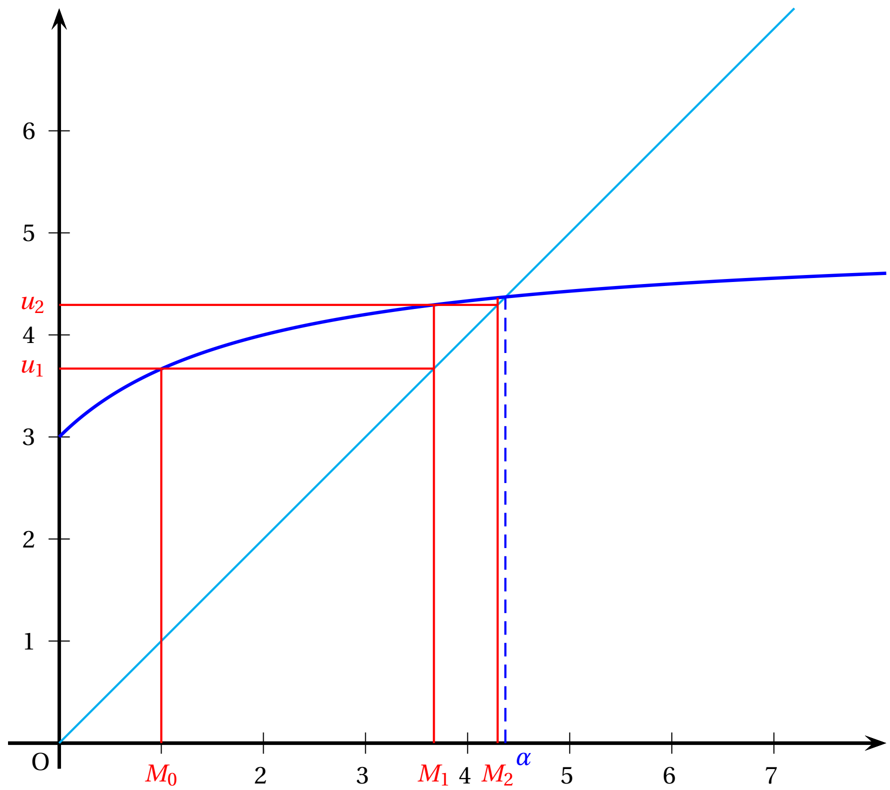
$$\left.\begin{array}{l}0 \leqslant p \leqslant 500 \iff 0 \leqslant 3+331k \leqslant 500 \Longrightarrow k \in \{0\,,\,1\}\\ 0 \leqslant q \leqslant 500 \iff 0 \leqslant 2+221k \leqslant 500 \Longrightarrow k \in \{0\,,\,1\,,\,2\}\end{array}\right\} \Longrightarrow k \in \{0\,,\,1\}$$

Pour $k = 0$, $(p\,,\,q) = (3\,,\,2)$ donc $u_3 = v_2 = 665$.

Pour $k = 1$, $(p\,,\,q) = (334\,,\,223)$ donc $u_{334} = v_{223} = 73\,816$.

Annexe 1 de l'exercice 4

réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité



Annexe 2 de l'exercice 4

réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que $i < n$
	Affecter à i la valeur $i+1$
	Affecter à u la valeur $5 - \dfrac{4}{u+2}$
	Affecter à s la valeur $s+u$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher s

Annexe de l'exercice 4 – Spécialité

réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

A	B	D
12	14	2
2	12	10
10	2	8
8	10	2
2	8	6
6	2	4
4	6	2
2	4	2
2	2	0