Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 14/11/2013 Corrigé

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = \text{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = x^2\text{e}^x - 1$.

Pour tout réel x de $[0~;~+\infty[$: $g'(x) = 2x\text{e}^x + x^2\text{e}^x \geqslant 0$ sur $]0~;~+\infty[$ (car tous les termes sont positifs.

La fonction g est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$ (car la dérivée ne s'annule qu'en 0).

b. $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = \text{e} - 1 > 0$. Dressons le tableau de variations de g :

x	0		a		1		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\text{e}-1$	$\nearrow$	

D'après ce tableau de variations, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0;1]$; on appelle a cette solution.

$g(0{,}703) \approx -0{,}0018 < 0$ et $g(0{,}704) \approx 0{,}002 > 0$ donc $a \in [0{,}703;0{,}704]$.

c. D'après le tableau de variations de g :
- $g(x) < 0$ sur $[0;a[$
- $g(x) > 0$ sur $]a;+\infty[$

2. Étude de la fonction f

a.
$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0} \text{e}^x = 1\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \text{e}^x + \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \text{e}^x = +\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} \text{e}^x + \frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

$$f(x) = \text{e}^x + \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(x) = \text{e}^x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2\text{e}^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

c. Pour tout x de $]0~;~+\infty[$, $x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

On dresse le tableau de variation de f :

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

d. D'après son tableau de variation, la fonction f admet le nombre $f(a)$ comme minimum sur son intervalle de définition.
$f(a) = \mathrm{e}^{a} + \dfrac{1}{a}$. Or a est la solution de l'équation $g(x) = 0$ donc
$g(a) = 0 \iff a^2\mathrm{e}^{a} - 1 = 0 \iff a^2\mathrm{e}^{a} = 1 \iff \mathrm{e}^{a} = \dfrac{1}{a^2}$.
On en déduit que $f(a) = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$ et on a donc démontré que la fonction f admettait pour minimum sur $]0\,;\,+\infty[$ le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

e. On a successivement(en valeurs approchées) :

$$\begin{array}{c|c}
0{,}703 < a < 0{,}704 & 0{,}703 < a < 0{,}704 \\
0{,}4942 < a^2 < 0{,}4957 & \dfrac{1}{0{,}704} < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{0{,}703} \\
\dfrac{1}{0{,}4957} < \dfrac{1}{a^2} < \dfrac{1}{0{,}4942} & 1{,}420 < \dfrac{1}{a} < 1{,}423 \\
2{,}017 < \dfrac{1}{a^2} < 2{,}024 &
\end{array}$$

donc par somme : $2{,}017 + 1{,}420 < \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a} < 2{,}024 + 1{,}423$ et donc :
$3{,}43 < m < 3{,}45$

EXERCICE 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$

PARTIE A

```
Variables :  N est un entier
             U,V,W sont des réels
             K est un entier
Début :      Affecter 0 à K
             Affecter 2 à U
             Affecter 10 à V
             Saisir N
             Tant que K < N
                 | Affecter K+1 à K
                 | Affecter U à W
                 | Affecter (2U+V)/3 à U
                 | Affecter (W+3V)/4 à V
             Fin tant que
             Afficher U
             Afficher V
Fin
```

État des variables :

K	W	U	V
0	—	2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

PARTIE B

1. a. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n)}{12} - \frac{4(2u_n + v_n)}{12}\\
&= \frac{3u_n + 9v_n - 8u_n - 4v_n}{12} = \frac{5v_n - 5u_n}{12} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)
\end{aligned}$$

b. Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

D'après la question précédente, on peut dire que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$.

D'après le cours (forme explicite d'une suite géométrique) on peut dire que, pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.

2. a. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{3u_n}{3} = \dfrac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \dfrac{v_n - u_n}{3} = \dfrac{w_n}{3}$

On a vu que, pour tout n, $w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$; on peut en déduire que pour tout n, $w_n > 0$ et donc que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - \dfrac{4v_n}{4} = \dfrac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{-w_n}{4}$

Et comme $w_n > 0$, on peut dire que $v_{n+1} - v_n < 0$ pour tout n.

Donc la suite (v_n) est décroissante.

b. On a vu que, pour tout n, $w_n > 0$; donc, pour tout n, $v_n - u_n > 0$ c'est-à-dire $v_n > u_n$.

La suite (v_n) est décroissante donc, pour tout n, $v_n \leqslant v_0 \iff v_n \leqslant 10$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ v_n \leqslant 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \leqslant 10$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout n, $u_n \geqslant u_0 \iff u_n \geqslant 2$.

Pour tout entier naturel n, $\left.\begin{array}{r} v_n > u_n \\ u_n \geqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow v_n \geqslant 2$.

c. La suite (u_n) est croissante majorée par 10 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ_u.

La suite (v_n) est décroissante minorée par 2 donc, d'après ce même théorème, la suite (v_n) est convergente vers un réel ℓ_v.

3. La suite (w_n), définie par $w_n = v_n - u_n$, est convergente comme différence de deux suites convergentes, et sa limite est égale à $\ell_v - \ell_u$.

Or la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{12}$ et $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$; donc on peut dire que la suite (w_n) est convergente vers 0.

La limite d'une suite est unique donc $\ell_v - \ell_u = 0$ et donc $\ell_v = \ell_u$; les suites (u_n) et (v_n) ont donc la même limite qu'on appelle ℓ.

4. $t_{n+1} = 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \dfrac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n$

$= 3u_n + 4v_n = t_n$ donc la suite (t_n) est constante.

$t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 6 + 40 = 46$

Comme la suite (t_n) est constante, pour tout n, $t_n = t_0 = 46$; la suite (t_n) est donc convergente vers 46.

Les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux convergentes vers ℓ donc la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est convergente vers $3\ell + 4\ell = 7\ell$.

La limite d'une suite est unique donc $7\ell = 46 \iff \ell = \dfrac{46}{7}$.

La limite commune des suites (u_n) et (v_n) est donc $\dfrac{46}{7}$.

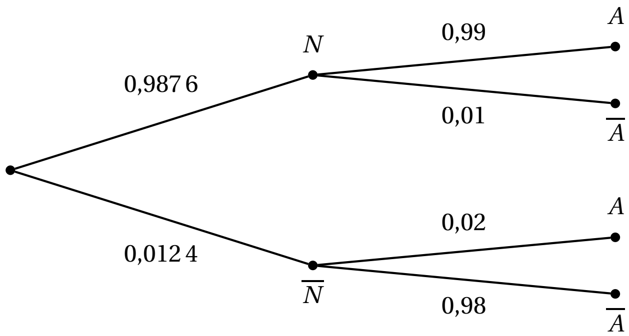
EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. Une bille est dans la norme si son diamètre est entre 9 et 11 mm ; donc la probabilité qu'une bille soit dans la norme est
$P(9 \leqslant X \leqslant 11) = P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9)$.
La probabilité que la bille soit hors norme est donc :
$1-(P(X \leqslant 11) - P(X \leqslant 9)) = 1-(0{,}99379034 - 0{,}00620967) = 1-0{,}98758067 = 0{,}01241933$; donc une valeur approchée à 0,000 1 de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4.

2. **a.** On construit un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé :



b. D'après la formule des probabilités totales :
$$P(A) = P(N \cap A) + P\left(\overline{N} \cap A\right) = P(N) \times P_N(A) + P\left(\overline{N}\right) \times P_{\overline{N}}(A)$$
$$= 0{,}9876 \times 0{,}99 + 0{,}0124 \times 0{,}02 = 0{,}977724 + 0{,}000248 = 0{,}977972$$
$$\approx 0{,}9780$$
La probabilité de A est 0,978 0 (arrondie au dix-millième).

c. On cherche : $P_A\left(\overline{N}\right) = \dfrac{P\left(A \cap \overline{N}\right)}{P(A)} = \dfrac{0{,}000248}{0{,}977972} \approx 0{,}0003$
La probabilité qu'une bille acceptée soit hors norme est 0,000 3 (arrondie au dix-millième).

Partie B

1. La probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,012 4 : on admet que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.
Donc la variable aléatoire Y qui, à tout sac de 100 billes, associe le nombre de billes hors norme, suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}0124$.

2. L'espérance mathématique et l'écart type d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p sont respectivement np et $\sqrt{np(1-p)}$.
Donc $E(Y) = np = 100 \times 0{,}0124 = 1{,}24$
et $\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \times 0{,}0124 \times 0{,}9876} \approx 1{,}1066$.

3. La probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme est $P(Y = 2)$.
$P(Y=2) = \dbinom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = \dbinom{100}{2} \times 0{,}0124^2 \times 0{,}9876^{98} =$
$50 \times 99 \times 0{,}0124^2 \times 0{,}9876^{98} \approx 0{,}224076 \approx 0{,}2241$.

4. Un sac de billes contient au plus une bille hors norme est l'événement $(Y \leqslant 1)$.
$P(Y \leqslant 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1)$

$$= \binom{100}{0} \times 0{,}0124^0 \times 0{,}9876^{100} + \binom{100}{1} \times 0{,}0124^1 \times 0{,}9876^{99}$$

$$\approx 0{,}2871 + 0{,}3605 \approx 0{,}64768 \approx 0{,}6477.$$

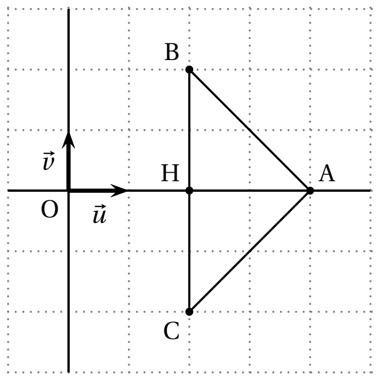
EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

1. $(1+\text{i})^{4n} = \left((1+\text{i})^4\right)^n$ et $(1+\text{i})^4 = \left((1+\text{i})^2\right)^2$
$(1+\text{i})^2 = 1+2\,\text{i}+\text{i}^2 = 1+2\,\text{i}-1 = 2\,\text{i}$; donc $(1+\text{i})^4 = (2\,\text{i})^2 = 4\,\text{i}^2 = -4$
Donc $(1+\text{i})^{4n} = (-4)^n$; **la proposition est vraie.**

2. On cherche les solutions de l'équation (E) : $(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0$.
Il y a $z = 4$ qui annule $z-4$.
Pour $z^2-4z+8 = 0$: $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times 8 = 16-32 = -16 < 0$
L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{-(-4)+\text{i}\sqrt{16}}{2} = \dfrac{4+4\,\text{i}}{2} = 2+2\,\text{i}$ et $z_2 = 2-2\,\text{i}$
L'équation (E) admet pour solutions $\left\{4,\ 2+2\,\text{i}\,,\ 2-2\,\text{i}\right\}$.
Représentons les points dont les affixes sont solutions de (E) :



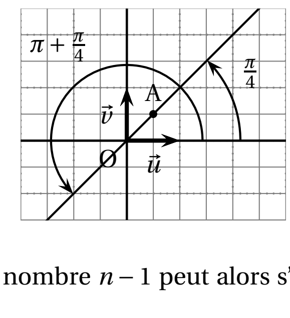
Le triangle ABC est isocèle en A car les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}\right)$ et A appartient à cet axe ; donc le milieu H de [BC] est aussi le pied de la hauteur issue de A dans le triangle.
H a pour affixe 2 donc AH=2 ; de plus $\text{BC} = |2+2\,\text{i} - 2+2\,\text{i}| = |4\,\text{i}| = 4$.
L'aire de ce triangle vaut donc :
$\dfrac{\text{BC}\times\text{AH}}{2} = \dfrac{4\times 2}{2} = 4$

La proposition est fausse.

3. Soit α un nombre réel quelconque ; on sait que $1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$.
$$\begin{aligned}1+\text{e}^{2\,\text{i}\,\alpha} &= 1+\left(\text{e}^{\,\text{i}\,\alpha}\right)^2 = 1+(\cos\alpha+\text{i}\sin\alpha)^2 = 1+\cos^2\alpha+2\,\text{i}\sin\alpha\cos\alpha+\text{i}^2\sin^2\alpha\\ &= \cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\,\text{i}\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha+2\,\text{i}\sin\alpha\cos\alpha\\ &= 2\,(\cos\alpha+\text{i}\sin\alpha)\cos\alpha = 2\,\text{e}^{\,\text{i}\,\alpha}\cos\alpha\end{aligned}$$
La proposition est vraie.

4. Le nombre complexe z_{A} a pour argument $\dfrac{\pi}{4}$ donc le nombre complexe $(z_{\text{A}})^n$ a pour argument $n\dfrac{\pi}{4}$ (argument d'un produit).

Les points O, A et M_n sont alignés si et seulement si l'argument de l'affixe de M_n est $\dfrac{\pi}{4}$ ou $\pi+\dfrac{\pi}{4}$ à 2π près.



On suppose que $n-1$ est divisible par 4 ; le nombre $n-1$ peut alors s'écrire $4k$ avec k entier et donc n s'écrit $4k+1$.
L'argument de l'affixe de M_n qui est $n\dfrac{\pi}{4}$ peut s'écrire $(4k+1)\,\dfrac{\pi}{4} = k\pi + \dfrac{\pi}{4}$ qui est bien équivalent à $\dfrac{\pi}{4}$ ou $\pi+\dfrac{\pi}{4}$ à 2π près ;
donc si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
La proposition est vraie.

5. Le nombre j a pour module 1 et argument $\dfrac{2\pi}{3}$ donc j^2 a pour module $1^2 = 1$ et pour argument $2 \times \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$.

On a : $\text{j} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (propriétés du cercle trigonométrique).

Et : $\text{j}^2 = \cos\dfrac{4\pi}{3} + \text{i}\sin\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $1 + \text{j} + \text{j}^2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

La proposition est vraie.

Une solution plus élégante consiste à écrire le nombre j sous la forme $\text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ pour prouver que $\text{j}^3 = 1$. Ensuite on développe $\left(1 + \text{j} + \text{j}^2\right)\left(1 - \text{j}\right)$ en $1 - \text{j}^3$ qui donne donc 0. Et comme j n'est pas égal à 1, le facteur $1 - \text{j}$ n'est pas nul, mais comme le produit $\left(1 + \text{j} + \text{j}^2\right)\left(1 - \text{j}\right)$ est nul, c'est le facteur $1 + \text{j} + \text{j}^2$ qui est nul.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. On cherche tous les entiers x de E tels que $g(x) = x$:
   $g(x) = x \iff 4x+3 \equiv x \pmod{27} \iff 3x \equiv -3 \pmod{27}$
   ce qui veut dire que $3x$ s'écrit $-3+27k$ où $k \in \mathbb{Z}$.
   $$\begin{array}{rcccc} x \in E \iff & 0 & \leqslant & x & \leqslant 26 \\ & 0 & \leqslant & 3x & \leqslant 81 \\ \text{or } 3x = -3+27k \text{ donc} & 0 & \leqslant & -3+27k & \leqslant 81 \\ & 3 & \leqslant & 27k & \leqslant 84 \\ & \dfrac{3}{27} & \leqslant & k & \leqslant \dfrac{84}{27} \end{array} \quad \text{Or } k \text{ est entier donc } k \in \{1,2,3\}.$$
   Pour $k = 1$, $3x = -3+27 = 24$ donc $x = 8$;
   pour $k = 2$, $3x = -3+54 = 51$ donc $x = 17$;
   pour $k = 3$, $3x = -3+81 = 78$ donc $x = 26$.
   Les éléments de E invariants par g sont 8, 17 et 26.
   Les caractères invariants dans ce codage sont les caractères correspondant à 8,17 et 26 donc ce sont les caractères i, r et $\star$.
2. Soient x et y deux éléments de E tels que $y \equiv 4x+3 \pmod{27}$.
   $y \equiv 4x+3 \pmod{27} \iff 7y \equiv 28x+21 \pmod{27}$;
   or $21 \equiv -6 \pmod{27}$ et $28 \equiv 1 \pmod{27}$ donc $28x \equiv x \pmod{27}$
   $$\begin{aligned} 7y \equiv 28x+21 \pmod{27} &\iff 7y \equiv x-6 \pmod{27} \iff 7y+6 \equiv x \pmod{27} \\ &\iff x \equiv 7y+6 \pmod{27} \end{aligned}$$
   On suppose qu'il existe deux caractères x et x' de E qui se codent par le même caractère y de E.
   On a donc $x \equiv 7y+6 \pmod{27}$ et $x' \equiv 7y+6 \pmod{27}$ ce qui entraîne $x \equiv x' \pmod{27}$ donc on peut écrire $x = x'+27k$ où $k \in \mathbb{Z}$.
   Or $0 \leqslant x \leqslant 26$ et $0 \leqslant x' \leqslant 26$ donc $k = 0$ et $x = x'$.
   Deux caractères distincts ne sont pas codés par un même caractère, donc deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.
3. Une méthode de décodage suit le même principe que la méthode de codage, en remplaçant la fonction g par la fonction f qui, à chaque élément y de E, associe le reste de la division euclidienne de $7y+6$ par 27.
4. On sait que la lettre s se code en la lettre v, donc la lettre v se décode en s.
   La lettre f correspond au nombre $y = 5$; $7y+6 = 7\times 5+6 = 35+6 = 41$.
   Or $41 = 27\times 1+14$ donc 14 est le reste de la division de 41 par 27.
   Le nombre 14 correspond à la lettre o.
   Donc $v\,f\,v$ se décode en $s\,o\,s$.