

∞ Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 16 novembre 2012 ∞

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. f est une somme de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 5 \times \frac{1}{x+3} - 1 = \frac{5-x-3}{x+3} = \frac{2-x}{x+3}.$$

Or $x \geq 0 \Rightarrow x+3 \geq 3 > 0$.

- $2-x > 0 \iff x < 2$.
- $2-x < 0 \iff x > 2$.
- $2-x = 0 \iff x = 2$.

- b. - La fonction f est croissante sur $[0; 2[$.

- La fonction f est décroissante sur $]2; +\infty[$.

- $f(2) = 5\ln(5) - 2 \approx 4,047$ est le maximum de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

On a le tableau de variations suivant :

x	0	2	α	$+\infty$
$f(x)$	$5\ln 3$	$5\ln(5) - 2$	0	$-\infty$

- c. Comme $x > 0$, on peut factoriser :

$$f(x) = 5\ln x \left(1 + \frac{3}{x}\right) - x = 5\ln x + 5\ln \left(1 + \frac{3}{x}\right) - x = 5\ln x - x + 5\ln \left(1 + \frac{3}{x}\right) = x \left(5 \frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln \left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

- d. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{\ln x}{x}\right) = \ln 1 = 0$, donc finalement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \times (-x) = -\infty.$$

D'autre part $f(0) = 5\ln 3$.

- e. Voir le tableau plus haut.

2. a. Sur l'intervalle $]2; +\infty[$, f est strictement décroissante de $f(2) > 0$ à $-\infty$. Il existe donc un réel unique $\alpha > 2$, tel que

$$f(\alpha) = 0 \iff 5\ln(\alpha+3) - \alpha = 0.$$

- b. $f(14) = 5\ln 17 - 14 \approx 0,17 > 0$ et $f(15) = 5\ln 18 - 15 \approx -0,55 < 0$, donc $14 < \alpha < 15$.

La calculatrice livre :

$$f(14,2) = 5\ln(17,2) - 14,2 \approx 0,02 > 0 \text{ et}$$

$$f(14,3) = 5\ln(17,3) - 14,3 \approx -0,05 < 0, \text{ donc}$$

$$14,2 < \alpha < 14,3.$$

- c. Le tableau de variations montre donc que :

- $f(x) > 0$ sur $[0; \alpha[$;
- $f(x) < 0$ sur $[\alpha; +\infty[$;
- $f(\alpha) = 0$.

Partie B

1. a. Voir l'annexe 1
- b. La suite semble être croissante.
2. a. La fonction g a même sens de variation que la fonction $\ln$, soit croissante; on peut également calculer $g'(x) = \frac{5}{x+3} > 0$ comme quotient de deux nombres supérieurs à zéro.
- b. On a vu dans la partie que $f(\alpha) = 0 \iff 5\ln(\alpha+3) - \alpha = 0 \iff 5\ln(\alpha+3) = \alpha \iff g(\alpha) = \alpha$.
- c. *Initialisation* : On a $0 \leq 4 \leq \alpha$: l'encadrement est vrai au rang 0;
Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 \leq u_n \leq \alpha$
 Comme la fonction g est croissante sur $[0; +\infty[$ donc en particulier sur $[0; \alpha]$, on a donc :
 $g(0) \leq g(u_n) \leq g(\alpha)$ c'est-à-dire
 $5\ln 3 \leq u_{n+1} \leq \alpha$ (d'après la question précédente).
 On a donc *a fortiori* : $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
 L'encadrement est vrai au rang $n+1$.
 L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai au rang n , il l'est aussi au rang $n+1$. On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq u_n \leq \alpha.$$
- d. On a vu que sur l'intervalle $[0; \alpha]$, $f(x) > 0$ sur $[0; \alpha]$, donc pour tout u_n tel que $0 \leq u_n \leq \alpha$, $\ln(u_n+3) - u_n > 0 \iff \ln(u_n+3) > u_n \iff g(u_n) > u_n \iff u_{n+1} > u_n$, ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.
 Cette suite est croissante et majorée par α : elle converge donc vers une limite ℓ telle que $\ell \leq \alpha$.
- e. La relation $u_{n+1} = 5\ln(u_n+3)$ donne par continuité de la fonction dérivable g et par limite en plus l'infini :
 $\ell = \ln(\ell+3) \iff \ln(\ell+3) - \ell = 0 \iff f(\ell) = 0$.
 Or on a vu à la question 2. a. de la partie A que α est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0; +\infty[$. Conclusion $\ell = \alpha$.
 On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.
3. a. Cet algorithme calcule successivement $u_1, u_2, \dots$. On a vu que cette suite converge vers le nombre α supérieur à 14,2. La condition $u - 14,2 < 0$ sera donc réalisée et l'algorithme affichera la première valeur de la suite supérieure à 14,02.
- b. Il suffit de taper sur la calculatrice :
 $u_0 = 4$ Entrée
 $5 \star \ln(\text{ANS}(1) + 3)$ Entrée
 Entrée, etc
 On obtient $u_6 \approx 14,223\,15 > 14,2$.

EXERCICE 2**4 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

1. Les trois tirages sont indépendants, et à chaque tirage la probabilité de tirer une boule rouge est égale à $\frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$: on a donc une épreuve de Bernoulli et la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{2}{5}$.

2. La probabilité de tirer k ($0 \leq k \leq 3$) boule(s) rouge(s) est égale à

$$p(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{3-k} \quad (\star).$$

$$\text{En particulier : } p(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^{3-1} = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{3^2}{5^2} = \frac{54}{125}.$$

3. On sait que $E(X) = n \times p = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1,2$.

Vérification : on calcule avec la formule $(\star)$:

$$p(X = 0) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125};$$

$$p(X = 2) = \frac{3!}{2!} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{5} = \frac{36}{125};$$

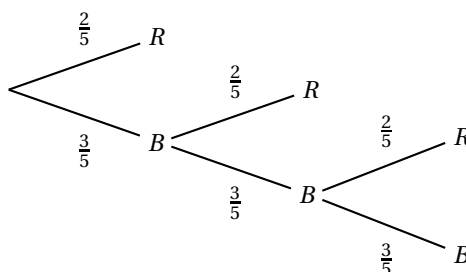
$$p(X = 3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}.$$

$$\text{On a donc } E(X) = 0 \times \frac{27}{125} + 1 \times \frac{54}{125} + 2 \times \frac{36}{125} + 3 \times \frac{8}{125} = \frac{54 + 72 + 24}{125} = \frac{150}{125} = \frac{6}{5}.$$

Sur un grand nombre de tirages on tirera un peu plus d'une boule rouge en moyenne par tirage (en moyenne 150 boules rouges sur 125 tirages).

Partie B

- 1.



2. On a $p(Y = 1) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{6}{25} + \frac{18}{125} = \frac{50 + 30 + 18}{125} = \frac{98}{125}.$

$$p(Y = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{27}{125}.$$

$$\text{Donc } E(Y) = 1 \times \frac{98}{125} + 0 \times \frac{27}{125} = \frac{98}{125}.$$

3. Toujours d'après l'arbre : $p(N = 1) = \frac{2}{5}$; $p(N = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$ et $p(N = 3) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}.$

$$\text{On a donc } E(N) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{6}{25} + 3 \times \frac{9}{25} = \frac{2}{5} + \frac{12}{25} + \frac{27}{25} = \frac{10 + 12 + 27}{25} = \frac{49}{25}.$$

4. On a $\frac{E(Y)}{E(N)} = \frac{\frac{98}{125}}{\frac{49}{25}} = \frac{98}{125} \times \frac{25}{49} = \frac{2}{5}$, soit la proportion de boules rouges dans l'urne.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A : restitution organisée de connaissances

Partie B

1. D'après le résultat de la partie A les fonctions solutions sont de la forme :

$$x \mapsto Ce^{-3x} + 2.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} Ce^{-3x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} Ce^{-3x} + 2 = 2$: toutes ces fonctions ont une représentation graphique qui admet la droite horizontale d'équation $y = 2$, comme asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini. Affirmation vraie.

2. On sait que $f(x) = Ce^x$.

$$f(\alpha + \beta) = Ce^{\alpha + \beta} = Ce^\alpha \times e^\beta;$$

$$f(\alpha) \times f(\beta) = Ce^\alpha \times Ce^\beta = C^2 e^\alpha \times e^\beta. \text{ Affirmation fausse.}$$

respectives

Une fonction solution est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{-2x}$.

$$f(0) = \frac{3}{2} \iff Ce^{-2 \times 0} = \frac{3}{2} \iff C = \frac{3}{2}.$$

Donc sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{2}e^{-2x}$. Une primitive de cette fonction est $F(x) = \frac{1}{-2} \times \frac{3}{2}e^{-2x} = -\frac{3}{4}e^{-2x}$

La fonction est positive sur $[0; \ln 3]$, donc l'aire du domaine est égal en unité d'aire à :

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3} f(x) dx &= [F(x)]_0^{\ln 3} = F(\ln 3) - F(0) = -\frac{3}{4}e^{-2\ln 3} + \frac{3}{4}e^{-2 \times 0} = \frac{3}{4} \left(1 - e^{-2\ln 3}\right) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{e^{2\ln 3}}\right) = \\ &= \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{e^{\ln 9}}\right) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{e^{\ln 9}}\right) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{3}. \text{ Affirmation vraie.} \end{aligned}$$

EXERCICE 4

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

$$1. z^2 - 2z + 2 = 0 \iff (z-1)^2 - 1 + 2 = 0 \iff (z-1)^2 + 1 = 0 \iff (z-1)^2 - i^2 = 0 \iff$$

$$(z-1+i)(z-1-i) = 0 \iff$$

$$\begin{cases} z-1+i=0 \text{ ou} \\ z-1-i=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=1-i \text{ ou} \\ z=1+i \end{cases}.$$

2. Soit M_1 d'affixe $z_1 = 1 - i$. On a $AM_1 = |z_1 - z_A| = |1 - i - 1| = |-i| = 1$.

De même $AM_2 = |z_2 - z_A| = |1 + i - 1| = |i| = 1$. Ces deux résultats signifient que M_1 et M_2 appartiennent au cercle de centre A et de rayon 1 soit au cercle $\mathcal{C}$.

Partie B

1. Voir à la fin de l'exercice.

$$2. z' = \frac{2z-1}{2z-2} \Rightarrow z' - 1 = \frac{2z-1}{2z-2} - 1 \iff z' - 1 = \frac{2z-1-2z+2}{2z-2} \iff z' - 1 = \frac{1}{2(z-1)} \iff (z' - 1)(z - 1) = \frac{1}{2}.$$

3. Le résultat précédent entraîne :

- en termes de modules : $AM \times AM' = \frac{1}{2}$;

- le produit des deux complexes étant non nul aucun des deux facteurs ne peut l'être, et en particulier $z' - 1 \neq 0 \iff z' \neq 1$, soit $M' \neq A$;

- en termes d'argument : $\arg[(z' - 1)(z - 1)] = 0 + 2k\pi$. Or

$$\arg[(z' - 1)(z - 1)] = \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM'}\right), \text{ donc } \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) + \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM'}\right) = 0 + 2k\pi, \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

4. On a $z_P = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}} \iff z_P - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow |z_P - 1| = \left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| \iff |z_P - 1| = 1$.

Cette dernière égalité montre que P appartient au cercle de centre A et de rayon 1, donc au cercle $\mathcal{C}$.

Il ne reste plus qu'à construire sur ce cercle le point tel que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AP}\right) = \frac{\pi}{4}$.

5. On a $AP \times AP' = \frac{1}{2}$; or $AP = 1$, donc $AP' = \frac{1}{2}$. Le point P' appartient au cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$. D'autre part on a $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AP'}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

On peut donc construire P_1 symétrique sur le cercle $\mathcal{C}$ du point P autour de l'axe horizontal contenant A. Le point P' est le point commun à $[AP_1]$ et au cercle $\mathcal{C}_1$. Voir plus bas.

6. a. On a donc $z = \frac{3}{4} + \alpha i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. D'où :

$$z' = \frac{2(\frac{3}{4} + \alpha i) - 1}{2(\frac{3}{4} + \alpha i) - 2} = \frac{\frac{3}{2} + 2\alpha i - 1}{\frac{3}{2} + 2\alpha i - 2} = \frac{\frac{1}{2} + 2\alpha i}{-\frac{1}{2} + 2\alpha i} = \frac{(\frac{1}{2} + 2\alpha i)(-\frac{1}{2} - 2\alpha i)}{(-\frac{1}{2} + 2\alpha i)(-\frac{1}{2} - 2\alpha i)} = \frac{-\frac{1}{4} - \alpha i - \alpha i + 4\alpha^2}{\frac{1}{4} + 4\alpha^2} =$$

$$z' = \frac{-\frac{1}{4} - 2\alpha i + 4\alpha^2}{\frac{1}{4} + 4\alpha^2}.$$

$$\text{D'où } |z'|^2 = \frac{(-\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2}{(\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2} + \frac{4\alpha^2}{(\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2} = \frac{\frac{1}{16} + 16\alpha^4 - 2\alpha^2 + 4\alpha^2}{(\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2} = \frac{\frac{1}{16} + 16\alpha^4 + 2\alpha^2}{(\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2} =$$

$$\frac{(\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2}{(\frac{1}{4} + 4\alpha^2)^2} = 1. \text{ D'où } |z'| = 1 : \text{ le point } M' \text{ appartient au cercle } \mathcal{C}' \text{ de centre O de rayon 1.}$$

- b. Un point M' de $\mathcal{C}'$ a une affixe qui peut s'écrire $z' = e^{ia}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Son ou ses antécédents par f vérifient :

$$e^{ia} = \frac{2z-1}{2z-2} \iff 2ze^{ia} - 2e^{ia} = 2z-1 \iff 2z(e^{ia}-1) = 2e^{ia}-1 \iff z = \frac{2e^{ia}-1}{e^{ia}-1} \text{ si } e^{ia}-1 \neq 0.$$

Or $e^{ia}-1=0 \iff e^{ia}=1 \iff a=0 \iff z=1$. C'est le point A et on sait que ce point n'a pas d'image par f . La réponse est : non.

EXERCICE 4

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. $DB = DE = \sqrt{2}$ et de façon évidente $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DE}) = \frac{\pi}{2}$, donc B a pour image E par r .

D'autre part l'image de C par r est le point F

Comme B et C ont pour images respectives par r , E et F, l'image du segment [BC] sert le segment [EF] et l'image du milieu I de [BC] est le milieu J de [EF].

2. Comme A est différent de I et B différent de J, on sait qu'il existe une seule similitude transformant A en C et I en J : c'est donc la rotation r .

3. a. $z_A = 0$; $z_C = 1 + i$, $z_I = 1 + \frac{1}{2}i$ et $z_J = \frac{1}{2} + 2i$.

- b. s étant une similitude directe, on sait que son écriture complexe est de la forme :

$$z' = az + b, \text{ avec } a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}.$$

En utilisant les deux points donnés et leurs images, on obtient le système :

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{2}i = a \times 0 + b \\ \frac{1}{2} + 2i = a \times (1 + i) + b \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}i = b \\ \frac{1}{2} + 2i = a \times (1 + i) + 1 + \frac{1}{2}i \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{2}i = b \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = a \times (1 + i) \end{cases}$$

$$\text{D'où } a = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}{1 + i} = \frac{(-1 + 3i)(1 - i)}{2(1 + i)(1 - i)} = \frac{-1 + 3 + i + 3i}{2(1 + 1)} = \frac{1}{2} + i.$$

$$\text{L'écriture complexe de } s \text{ est } z' = \left(\frac{1}{2} + i\right)z + 1 + \frac{1}{2}i.$$

c. Recherche du point invariant (le centre de la similitude) :

$$z = \left(\frac{1}{2} + i\right)z + 1 + \frac{1}{2}i \iff z\left(\frac{1}{2} - i\right) = 1 + \frac{1}{2}i \iff z = \frac{1 + \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} - i} = \frac{(1 + \frac{1}{2}i)(\frac{1}{2} + i)}{(\frac{1}{2} - i)(\frac{1}{2} + i)} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i + i\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\frac{5}{4}i}{\frac{5}{4}} = i.$$

Le point invariant a pour affixe i : c'est le point D.

Partie B

1. On sait que l'écriture complexe de la similitude s_1 est de la forme :

$z' = az + b$. En utilisant le fait que O a pour image M et que N a pour image P, on obtient le système :

$$\begin{cases} m &= a \times 0 + b \\ p &= an + b \end{cases} \iff \begin{cases} m &= b \\ p &= an + m \end{cases} \iff \begin{cases} m &= b \\ p - m &= an \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{n}{p-m} &= \frac{b}{a} \\ \frac{p-m}{n} &= a \end{cases}$$

Donc s_1 a pour écriture complexe :

$$z' = \frac{p-m}{n}z + m.$$

On admet que l'écriture complexe de s_2 est $z' = \frac{p-n}{m}z + n$.

2. a. $OMPN$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NP} \iff m = p - n \iff p - m = n$.

L'écriture complexe de s_1 devient $z' = \frac{n}{n}z + m \iff z' = z + m$: cette écriture est celle d'une translation de vecteur $\overrightarrow{OM}$.

De même l'écriture complexe de s_2 s'écrit puisque $p - n = m$,

$z' = z + n$: c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{ON}$.

b. On suppose donc que $p - m \neq n$ (donc s_1 et s_2 ne sont pas des translations).

Le point fixe de s_1 a une affixe z qui vérifie :

$$z = \frac{p-m}{n}z + m \iff nz = (p-m)z + n \iff z(m+n-p) = n \iff z = \frac{n}{m+n-p}. s_1 \text{ a donc un centre.}$$

De même le point fixe de s_2 a une affixe z qui vérifie :

$$z = \frac{p-n}{m}z + n \iff mz = (p-n)z + n \iff z(m+n-p) = n \iff z = \frac{n}{m+n-p}. s_2 \text{ a donc un centre et c'est le même que celui de } s_1.$$

Annexe 1
(Exercice 1)
Commun à tous les candidats

À rendre avec la copie

