

Durée : 4 heures

~ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ~
10 novembre 2011

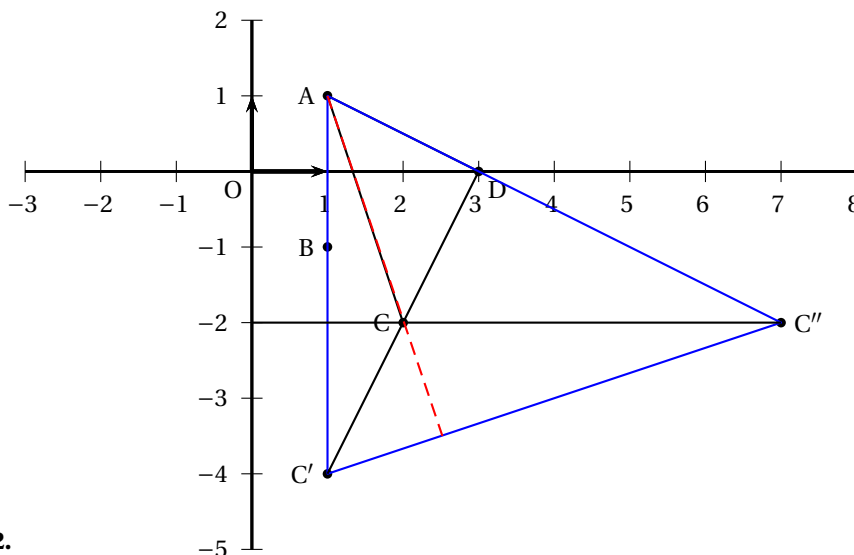
EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

1. $z^2 - 2z + 2 = 0 \iff (x-1)^2 - 1 + 2 = 0 \iff (x-1)^2 + 1 = 0 \iff (x-1)^2 - i^2 = 0 \iff (x-1+i)(x-1-i) = 0$.
Il y a donc deux solutions complexes :

$1 - i ; 1 + i$.



2.

3. On a $|z_D - z_A|^2 = |3 - 1 - i|^2 = |2 - i|^2 = 4 + 1 = 5$.
De même $|z_D - z_B|^2 = |3 - 1 + i|^2 = |2 + i|^2 = 4 + 1 = 5$.
 $|z_D - z_C|^2 = |3 - 2 + 2i|^2 = |1 + 2i|^2 = 1 + 4 = 5$.
On a donc $DA^2 = DB^2 = DC^2 = 5 \iff DA = DB = DC = \sqrt{5}$.
Conclusion : A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D et de rayon $\sqrt{5}$.
4. $\frac{z_C - 3}{z_A - 3} = \frac{2 - 2i - 3}{1 + i - 3} = \frac{-1 - 2i}{-2 + i} = \frac{(-1 - 2i)(-2 - i)}{(-2 + i)(-2 - i)} = \frac{2 - 2 + i + 4i}{4 + 1} = \frac{5i}{5} = i$.
• On a donc $z_C - 3 = i(z_A - 3)$ ou encore $z_C - z_D = i(z_A - z_D)$ égalité qui signifie que C est l'image du point A dans la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Par propriété de la rotation $DA = DC$: conclusion : le triangle DAC est rectangle et isocèle en D.
5. Par définition de l'homothétie h les points C, D et C' sont alignés.
Par propriété de la rotation r le droite (DC'') est perpendiculaire à la droite (DC') , et comme (DC') est d'après la question précédente perpendiculaire à la droite (AD) , les points A, D et C'' sont alignés.
Affixe de C' : par définition de l'homothétie on a :
 $z_{C'} - z_D = 2(z_C - z_D)$ soit $z_{C'} - 3 = 2(2 - 2i - 3) = -2 - 4i \iff z_{C'} = 3 - 2 - 4i = 1 - 4i$.
Affixe de C'' : par définition de la rotation :
 $z_{C''} - z_D = i(z_{C'} - z_D)$ soit $z_{C''} - 3 = i(1 - 4i - 3) \iff z_{C''} - 3 = -2i + 4 \iff z_{C''} = 7 - 2i$.
Considérons le triangle $AC'C''$:
— A et C' ont la partie réelle, donc la droite (AC') est parallèle à l'axe (O, \vec{v}) ;
— C et C'' ont la même partie imaginaire, donc la droite (CC'') est parallèle à l'axe (O, \vec{u}) ;

— Conclusion : la droite (AC') est perpendiculaire à la droite (CC'')

Dans le triangle ACC' les droites (C'D) et (CC'') sont deux hauteurs ; leur point commun C est l'orthocentre de ce triangle. La troisième hauteur est donc la droite (AC) qui est perpendiculaire à la droite (C'C'').

EXERCICE 2**5 points****Commun à tous les candidats**

1. a. • Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{x} = +\infty$, puis $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$, donc finalement $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

• Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = +1$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0$, donc finalement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

b. Sur $]0 ; +\infty[$, f somme de composées de fonctions dérivables est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} - 1 = -\frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} - 1 = -\frac{1}{x^2 + x} - 1 = \frac{-1 - x^2 - x}{x^2 + x}.$$

Comme $x > 0$ implique $x + x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $-1 - x^2 - x = -(1 + x + x^2)$.

Or $x > 0 \Rightarrow x + x^2 > 0 \Rightarrow 1 + x + x^2 > 1 > 0$ et finalement $-(1 + x + x^2) < 0$.

La négativité stricte de la fonction dérivée sur $]0 ; +\infty[$ implique la décroissance stricte de la fonction f sur cet intervalle.

c. On a vu dans les deux questions précédentes que la fonction f décroît strictement sur $]0 ; +\infty[$ de $+\infty$ à $-\infty$. : il existe donc une valeur unique α de x appartenant à $]0 ; +\infty[$ telle que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne $f(0,806) \approx 0,00079$ et $f(0,807) \approx -0,0009$.

Conclusion : $0,806 < \alpha < 0,807$.

2. a. Voir l'annexe 1.

b. Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ?

- Conjecture n° 1 : « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. » NON
- Conjecture n° 2 : « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0,5. » OUI
- Conjecture n° 3 : « la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1. » NON

c. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$, la relation $u_{n+1} = g(u_n)$ entraîne par continuité de la fonction g

$$\text{l'égalité } \ell = g(\ell) \iff \ell = \ln \left(1 + \frac{1}{\ell} \right).$$

d. L'égalité précédente s'écrit $\ln \left(1 + \frac{1}{\ell} \right) - \ell = 0$, ce qui montre que ℓ est une solution de l'équation

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - x = 0 \iff f(x) = 0.$$

On a vu à la question 1. c. que cette équation a une unique solution dans $]0 ; +\infty[: \alpha$.

Donc $\ell = \alpha \approx 0,806$

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**

1. On a donc $0,6 = \int_0^7 \lambda e^{-\lambda x} dx \iff 0,6 = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^7 \iff 0,6 = -e^{-7\lambda} + 1 \iff e^{-7\lambda} = 0,4 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien $-7\lambda = \ln(0,4) \iff \lambda = \frac{\ln(0,4)}{-7} \approx 0,1308 \approx 0,131$ à 10^{-3} près.

2. On a $p(X > 5) = 1 - p(X \leq 5) = 1 - \int_0^5 0,131e^{-0,131x} dx = 1 - [-e^{-0,131x}]_0^5 = 1 + e^{-0,131 \times 5} - 1 \approx 0,519 \approx 0,52$
à 10^{-2} près.
3. Puisqu'on a une loi sans vieillissement :
 $p_{X>4}(X > 9) = p_{X>4}(X > 4 + 5) = p(X > 5) \approx 0,52$.
4. On a $p(6 \leq X \leq 10) = p(X \leq 10) - p(X \leq 6) = (1 - e^{-0,131 \times 10}) - (1 - e^{-0,131 \times 6}) = e^{-0,131 \times 6} - e^{-0,131 \times 10} \approx 0,19$.
5. a. Les temps sont supposés indépendants de durée supérieure ou égale à 5 heures (avec une probabilité égale à 0,52) ou inférieure à 5 heures (avec une probabilité égale à $1 - 0,52 = 0,48$).
La variable Y suit donc une loi binomiale de paramètres $p = 0,52$ et $n = 8$.
- b. On a $p(Y = 3) = \binom{8}{3} \times 0,52^3 \times 0,48^{8-3} = 56 \times 0,52^3 \times 0,48^5 \approx 0,20$.
- c. On a $E(Y) = n \times p = 8 \times 0,52 = 4,16 \approx 4$.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : A(0 ; 0 ; 2), B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).

1. a. On a $\vec{AB}(0 ; 4 ; -2)$ et $\vec{AC}(2 ; 0 ; -2)$.
Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les trois points A, B et C définissent bien un plan P_1 .
 $A(0 ; 0 ; 2) \in P_1 \iff 2 \times 0 + 0 + 2 \times 2 = 4$: vrai ;
 $B(0 ; 4 ; 0) \in P_1 \iff 2 \times 0 + 4 + 0 \times 2 = 4$: vrai ;
 $C(2 ; 0 ; 0) \in P_1 \iff 2 \times 0 + 0 + 2 \times 2 = 4$: vrai ;
Une équation du plan (ABC) est donc : $2x + y + 2z = 4$.
- b. On sait que $d(O, (ABC)) = \frac{|2 \times 0 + 0 + 2 \times 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3}$.
2. a. La droite (BC) étant orthogonale au plan, le vecteur \vec{BC} est un vecteur normal à ce plan. Comme $\vec{BC}(2 ; -4 ; 0)$, on sait qu'une équation du plan cherché est :
 $2x - 4y = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.
Les coordonnées de A vérifient cette équation, soit :
 $0 = a$.
Une équation du plan est donc $2x - 4y = 0 \iff x - 2y = 0$.
- b. Le plan (ABC) a un vecteur normal $\vec{u}(2 ; 1 ; 2)$ qui n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{BC}(2 ; -4 ; 0)$, vecteur normal à P, donc les plans (ABC) et P sont sécants en Δ . On a :
- $$M(x ; y ; z) \in \Delta \iff \begin{cases} x - 2y & = & 0 \\ 2x + y + 2z & = & 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 2y \\ y & = & y \\ 2x + 2z & = & 4 - y \end{cases}$$
- $$\iff \begin{cases} x & = & 2y \\ y & = & y \\ 2z & = & -2(2y) - y + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 2y \\ y & = & y \\ 2z & = & -5y + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 2y \\ y & = & y \\ z & = & -\frac{5}{2}y + 2 \end{cases} \iff$$
- $$M(x ; y ; z) \in \Delta \iff \begin{cases} x & = & 4t \\ y & = & 2t \\ z & = & -5t + 2 \end{cases}$$
- La droite (BC) orthogonale à (P) est orthogonale à toute droite de (P), donc en particulier à Δ . Or cette droite appartient au plan ABC : elle contient un sommet A et est perpendiculaire au côté opposé [BC] : c'est donc la hauteur issue de A du triangle ABC.

3. a. Δ' contient le milieu I de [AC]; I(1; 0; 1).

Un point $M(x; y; z)$ appartient à la médiane (BI) si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BI}$ qui se traduit par le système :

$$\begin{cases} x-0 &= t \\ y-4 &= -4t \\ z-0 &= 1+t \end{cases} \iff \begin{cases} x &= t \\ y &= 4-4t \\ z &= t \end{cases}$$

- b. De $\overrightarrow{AC}(2; 0; -2)$ on déduit $AC^2 = 2^2 + (-2)^2 = 4 + 4 = 8$.

De $\overrightarrow{AB}(0; 4; -2)$ on déduit $AB^2 = 4^2 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20$.

De même de $\overrightarrow{BC}(2; -4; 0)$ on déduit $BC^2 = 2^2 + (-4)^2 = 4 + 16 = 20$.

$AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB = BC = 2\sqrt{5}$. Le triangle ABC est isocèle en B.

Rem. On peut également montrer que les vecteurs \overrightarrow{BI} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux et par conséquent que Δ' est à la fois hauteur et médiane du triangle ABC qui est donc isocèle.

4. Les coordonnées $(x; y; z)$ du point H commun à Δ et à Δ' vérifient le système :

$$\begin{cases} 4t &= t' \\ 2t &= 4-4t' \\ -5t+2 &= t' \end{cases} \iff \begin{cases} 4t &= t' \\ 2t &= 4-4(4t) \\ -5t+2 &= 4t \end{cases} \iff \begin{cases} 4t &= t' \\ 2 &= 9t \\ 2 &= 9t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4t &= t' \\ t &= \frac{2}{9} \\ t &= \frac{2}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{8}{9} &= t' \\ t &= \frac{2}{9} \\ t &= \frac{2}{9} \end{cases}$$

En utilisant l'une ou l'autre des équations on obtient $H\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\right)$.

On a vu que le triangle ABC est isocèle en B. La droite (Δ') médiane issue du sommet principal B est aussi hauteur du triangle ABC.

On a aussi montré que (Δ) est aussi hauteur de ce triangle ABC.

Conclusion : le point H commun à deux hauteurs est l'orthocentre du triangle ABC.

5. Calculons $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{8}{9} \times 0 + \frac{4}{9} \times 4 + \frac{8}{9} \times (-2) = \frac{16}{9} - \frac{16}{9} = 0$.

De même $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{8}{9} \times 2 + \frac{4}{9} \times 0 + \frac{8}{9} \times (-2) = \frac{16}{9} - \frac{16}{9} = 0$.

La droite (OH) orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABC) est orthogonale à ce plan.

Mais H point de (OH) appartient aussi au plan (ABC); conclusion : le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

On calcule $OH^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64+16+64}{81} = \frac{144}{81} \Rightarrow OH = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. a. On a $x^2 + y^2 - z^2 = 4 \iff (-x)^2 + (-y)^2 - (-z)^2 = 4$. Cette égalité montre que si le point $M(x; y; z)$ appartient à S alors le point $M'(-x; -y; -z)$ appartient aussi à S.
Cette surface admet donc l'origine comme centre de symétrie
- b. $x^2 + y^2 - z^2 = 4 \iff x^2 + y^2 - (-z)^2 = 4$. Cette égalité montre que si le point $M(x; y; z)$ appartient à S alors le point $M'(x; y; -z)$ appartient aussi à S. La surface admet donc le plan (xOy) comme plan de symétrie.
2. a. Le plan (xOy) a pour équation $z = 0$. Tout point de la section a ses coordonnées $(x; y; z)$ qui vérifient :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

Or $x^2 + y^2 = 4 \iff (x-0)^2 + (y-0)^2 = 2^2$ est l'équation du cercle du plan $z=0$ centré en $O(0; 0)$ et de rayon 2.

b. De même les coordonnées d'un point de la section vérifient :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 4 \\ z = k \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 + k^2 \\ z = k \end{cases}$$

Comme $k^2 \geq 0 \Rightarrow 4 + k^2 \geq 4 > 0$, $x^2 + y^2 = 4 + k^2 \iff (x-0)^2 + (y-0)^2 = \sqrt{4+k^2}$ est l'équation du cercle centré en $(0; 0; k)$ et de rayon $\sqrt{4+k^2}$.

3. Un point de la section a ses coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 4 \\ y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - z^2 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+z)(x-z) = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+z = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-z = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

La section est donc constituée des deux droites du plan $y=2$ d'équations respectives $x=z$ et $x=-z$.

4. a. On a $\overrightarrow{AB}(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; -4)$, donc le vecteur $\vec{u} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}(1; -1; \sqrt{2})$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

$$M(x; y; z) \in (AB) \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \iff$$

$$\begin{cases} x - 2\sqrt{2} = t \\ y - 0 = -t \\ z - 2 = t\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2\sqrt{2} + t \\ y = -t \\ z = 2 + t\sqrt{2} \end{cases}$$

b. Un point de (AB) appartient à (S) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la surface :

$$(2\sqrt{2} + t)^2 + (-t)^2 - (2 + t\sqrt{2})^2 = 4 \iff 8 + t^2 + 4t\sqrt{2} + t^2 - 4 - 2t^2 - 4t\sqrt{2} = 4 \iff 4 = 4.$$

L'égalité est vraie quel que soit le réel t .

Conclusion : tout point de la droite (AB) est un point de la surface.

5. • La figure 3 est à rejeter puisque la surface n'est pas symétrique par rapport à O.

• La section de la surface 1 par le plan d'équation $z=0$ n'est pas le cercle centré en O de rayon mais est réduite au point O. La surface 1 n'est donc pas la bonne.

• La seule figure possible est la 2 : hyperboloïde de révolution.

6. a. Un point $M(x; y; z)$ appartient à H si et seulement si ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 4 \\ y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 25 - z^2 = 4 \\ y = 5 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = -21 \\ y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+z)(x-z) = -21 \\ y = 5 \end{cases}$$

b. D'après la question précédente les points de H doivent avoir des coordonnées entières telles que les deux entiers $x+z$ et $x-z$ sont des diviseurs de -21 . Ces diviseurs sont : $-21; -7; -3; -1; 1; 3; 7; 21$.

On a donc :

$$\begin{cases} x+z = -21 \\ x-z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z = -21 \\ 2x = -20 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -11 \\ x = -10 \end{cases}, \text{ soit le point } (-10; 5; -11)$$

$$\text{ou } \begin{cases} x+z = -7 \\ x-z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z = -7 \\ 2x = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -5 \\ x = -2 \end{cases}, \text{ soit le point } (-2; 5; -5)$$

$$\text{ou } \begin{cases} x+z = -3 \\ x-z = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z = -3 \\ 2x = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -5 \\ x = 2 \end{cases}, \text{ soit le point } (2; 5; -5)$$

$$\begin{aligned} \text{ou } \begin{cases} x+z &= -1 \\ x-z &= 21 \end{cases} &\iff \begin{cases} x+z &= -1 \\ 2x &= 20 \end{cases} \iff \begin{cases} z &= -11 \\ x &= 10 \end{cases}, \text{ soit le point } (10; 5; -11) \\ \text{ou } \begin{cases} x+z &= 1 \\ x-z &= -21 \end{cases} &\iff \begin{cases} x+z &= 1 \\ 2x &= -20 \end{cases} \iff \begin{cases} z &= 11 \\ x &= -10 \end{cases}, \text{ soit le point } (-10; 5; 11) \\ \text{ou } \begin{cases} x+z &= 3 \\ x-z &= -7 \end{cases} &\iff \begin{cases} x+z &= -21 \\ 2x &= -4 \end{cases} \iff \begin{cases} z &= 5 \\ x &= -2 \end{cases}, \text{ soit le point } (-2; 5; 5) \\ \text{ou } \begin{cases} x+z &= 7 \\ x-z &= -3 \end{cases} &\iff \begin{cases} x+z &= 7 \\ 2x &= 4 \end{cases} \iff \begin{cases} z &= 5 \\ x &= 2 \end{cases}, \text{ soit le point } (2; 5; 5) \\ \text{ou } \begin{cases} x+z &= 21 \\ x-z &= -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} x+z &= 21 \\ 2x &= 20 \end{cases} \iff \begin{cases} z &= 11 \\ x &= 10 \end{cases}, \text{ soit le point } (10; 5; 11). \end{aligned}$$

ANNEXE 1

Commun à tous les candidats

(À rendre avec la copie)
Exercice 2