**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie 15 novembre 2010

**EXERCICE 1** **7 points**

**Commun à tous les candidats**

**PARTIE A : restitution organisée de connaissances**

On suppose connus les résultats suivants :
Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$

- ⋆ si pour tout $x \in [a\,;\,b]$ $\quad u(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b [u(x)+v(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$
- ⋆ $\displaystyle\int_a^b \alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ où $\alpha$ est un nombre réel.

Démontrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a < b$ et si pour tout $x$ de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**PARTIE B :**

Soit $\varphi$ la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2\ln x.$$

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction $\varphi$ sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

   **b.** Calculer $\varphi(\mathrm{e})$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$. Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-1}$.

   **c.** Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de $x$.

2. Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

   On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.

   **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.

   **b.** Déduire de la question 1. le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

   **c.** Démontrer que pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

   **d.** En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

**3.** **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

**b.** On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$, dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

Soit $\mathscr{A}$ l'aire exprimée en cm$^2$ du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Déterminer un encadrement de $\mathscr{A}$.

## EXERCICE 2 — 5 points

**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{3} + \mathrm{i} \text{ et } z_{\mathrm{C}} = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

**1.** **a.** Écrire $z_{\mathrm{A}}$, $z_{\mathrm{B}}$ et $z_{\mathrm{C}}$ sous forme exponentielle.

**b.** En déduire le centre et le rayon du cercle $\Gamma$ passant par les points A, B et C.

**c.** Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle $\Gamma$ puis placer les points B et C.

**2.** **a.** Écrire le quotient $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

**b.** En déduire la nature du triangle ABC.

**3.** On note $r$ la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.

**a.** Montrer que le point O$'$, image de O par $r$, a pour affixe $-\sqrt{3} - \mathrm{i}$.

**b.** Démontrer que les points C et O$'$ sont diamétralement opposés sur le cercle $\Gamma$.

**c.** Tracer l'image $\Gamma'$ du cercle $\Gamma$ par la rotation $r$.

**d.** Justifier que les cercles $\Gamma$ et $\Gamma'$ se coupent en A et B.

**4.** **a.** Déterminer l'ensemble $(E)$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que

$$|z| = \left|z + \sqrt{3} + \mathrm{i}\right|.$$

**b.** Montrer que les points A et B appartiennent à $(E)$.

## EXERCICE 2 — 5 points

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère la similitude indirecte $f$ d'écriture complexe

$$z' = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\overline{z}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de $z$.
Soient les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = \sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ et $z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}$.
On note A$'$ et B$'$ les images respectives des points A et B par $f$.

**Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.**

**1.** **a.** Écrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.

  **b.** Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.
  **c.** En déduire la nature du triangle OA′B′.
  **d.** Montrer que l'affixe $z_{\text{A}'}$ de A′ vérifie l'égalité : $z_{\text{A}'} = 2z_{\text{A}}$.
  En déduire la construction de A′ et B′.

**2.** On note $r$ la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$, et $s$ la symétrie orthogonale d'axe $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right)$.
On pose $g = r \circ s$.
  **a.** Déterminer l'écriture complexe de la transformation $g$.
  **b.** Montrer que les points O et A sont invariants par $g$.
  **c.** En déduire la nature de la transformation $g$.

**3.** **a.** Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où $h$ est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.
  **b.** Sur la figure placée en **ANNEXE**, un point C est placé. Faire la construction de l'image C′ de C par la transformation $f$.

## EXERCICE 3 — 4 points

**Commun à tous les candidats**

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

**Les questions 1. et 2. sont indépendantes**

**1.** On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
  **a.** Vérifier que $P(X = 0) = \dfrac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.
  **b.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$.
  **c.** Calculer la probabilité de l'évènement suivant :
  A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».

**2.** On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :
*si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.*
  **a.** En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :

  $B$ : « seule la première boule tirée est verte »,
  $C$ : « une seule des deux boules tirées est verte ».

  **b.** Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

## EXERCICE 4 — 4 points

**Commun à tous les candidats**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$.

**L'objectif de cet exercice est de déterminer la position relative d'objets de l'espace**

$\mathscr{P}$ est le plan passant par A(3 ; 1 ; 2) et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1\,;\,-4\,;\,1)$ ;

$\mathscr{D}$ est la droite passant par B(1 ; 4 ; 2) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1\,;\,1\,;\,3)$.

$\mathscr{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1\,;\,9\,;\,0)$ passant par A.

1. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
   **a.** Démontrer que le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $x - 4y + z - 1 = 0$.
   **b.** Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.
2. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.
   **a.** Calculer la distance $d$ du point $\Omega$ au plan $\mathscr{P}$.
   **b.** Calculer le rayon de la sphère $\mathscr{S}$. En déduire l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.
3. Intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.
   **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.
   **b.** Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.
   **c.** En déduire que la droite $\mathscr{D}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ en deux points $M$ et $N$ distincts dont on ne cherchera pas à déterminer les coordonnées.

**ANNEXE**

**EXERCICE 2**

**Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

**À rendre avec la copie**