Durée : 4 heures

∽ Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∽ 15 novembre 2010

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A : restitution organisée de connaissances

PARTIE B :

1. **a.** f somme de fonctions dérivables sur $[1~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$\varphi'(x) = 2x - 4x\ln x - 2x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x - 4x\ln x - 2x = -4x\ln x$.
Comme $x \geqslant 1 \Rightarrow \ln x \geqslant 0$, il en résulte que sur $[1~;~+\infty[$, $\varphi'(x) \leqslant 0$: φ est donc décroissante sur $[1~;~+\infty[$.

   b. $\varphi(\text{e}) = 1 + \text{e}^2 - 2\text{e}^2 \times \ln \text{e} = 1 - \text{e}^2 \approx -6,4$.
D'autre part $\varphi(1) = 1 + 1 - 2 \times 0 = 2$.
La fonction est décroissante sur $[1~;~\text{e}]$, $\varphi(\text{e}) < 0$ et $\varphi(1) > 0$, donc la fonction φ continue car dérivable s'annule une seule fois en $\alpha \in [0~;~1]$.
La calculatrice donne :
$\varphi(1,8) \approx 0,4$; $\varphi(1,9) \approx -0,02$, donc :

$$1,8 < \alpha < 1,9.$$

   c. La variation de φ montre que :
   — sur $[1~;~\alpha[$, $\varphi(x) > 0$;
   — $\varphi(\alpha) = 0$;
   — sur $]\alpha~;~+\infty[$, $\varphi(x) < 0$.

2. **a.** Le dénominateur ne peut s'annuler, donc f quotient de fonctions dérivables sur $[1~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times \left(1 + x^2\right) - 2x\ln x}{\left(1 + x^2\right)^2} = \dfrac{1 + x^2 - 2x^2\ln x}{x\left(1 + x^2\right)^2} = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1 + x^2\right)^2}$.

   b. De la question 1. c. on déduit que :
   - sur $[1~;~\text{e}[$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante sur cet intervalle ;
   - $f'(\alpha) = 0$;
   - sur $]\alpha~;~+\infty[$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur cet intervalle.

   c. On a $x^2 < x^2 + 1 \iff \dfrac{1}{1 + x^2} < \dfrac{1}{x^2}$ et en multipliant par $\ln x \geqslant 0$, car $x \geqslant 1$, on obtient :
$\dfrac{\ln x}{1 + x^2} \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}$, soit $f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}$.
De plus sur $[1~;~+\infty[$, $\ln x \geqslant 0$ et $1 + x^2 > 1 > 0$, donc $f(x) \geqslant 0$.
Finalement : pour tout x appartenant à l'intervalle $[1~;~+\infty[$ on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

   d. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes l'encadrement précédent montre que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3. **a.** Posons :

$$\left\{\begin{array}{lllll} u(x) &=& \ln x & u'(x) &=& \dfrac{1}{x}\\ v'(x) &=& \dfrac{1}{x^2} & v(x) &=& -\dfrac{1}{x}\end{array}\right. .$$

Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur l'intervalle $[1~;~\text{e}]$, on peut intégrer par parties :

$$\int_1^{\text{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\text{d}x = \left[-\ln x \times \frac{1}{x}\right]_1^{\text{e}} - \int_1^{\text{e}} -\frac{1}{x^2}\,\text{d}x = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^{\text{e}} = -\frac{\ln \text{e}}{\text{e}} - \frac{1}{\text{e}} - \left(\frac{\ln 1}{1} - \frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{2}{\text{e}}.$$

b. Puisque l'unité d'aire est égale à 1 cm^2, on sait que l'intégrale précédente est égale à $\mathcal{A}$.

On a vu que $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}$, donc d'après la restitution organisée de connaissances de la partie A, on a

$0 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 1 - \dfrac{2}{\text{e}}$ (soit à peu près $0 < \mathcal{A} \leqslant 0,265$.

Exercice 2 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $z_{\text{A}} = -2\text{i} = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}$.

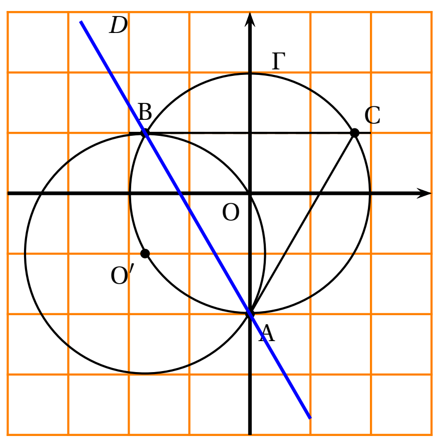
$z_{\text{B}} = -\sqrt{3} + \text{i}$ donc $|z_{\text{B}}|^2 = 3 + 1 = 4 = 2 \Rightarrow |z_{\text{B}}| = 2$.

On peut donc écrire $z_{\text{B}} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$.

On a de même $|z_{\text{C}}| = 2$, d'où $z_{\text{C}} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \text{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

b. z_{A}, z_{B} et z_{C} ont pour module 2, soit OA = OB = OC= 2, ce qui signifie que A, B et C appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 2.

c.



2.

a. $\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}} = \dfrac{-\sqrt{3} + \text{i} + 2\text{i}}{\sqrt{3} + \text{i} + 2\text{i}} = \dfrac{-\sqrt{3} + 3\text{i}}{\sqrt{3} + 3\text{i}} = \dfrac{\left(-\sqrt{3} + 3\text{i}\right)\left(\sqrt{3} - 3\text{i}\right)}{\left(\sqrt{3} + 3\text{i}\right)\left(\sqrt{3} - 3\text{i}\right)} = \dfrac{-3 + 6\text{i}\sqrt{3} + 9}{3 + 9} = \dfrac{6 + 6\text{i}}{12} = \dfrac{1 + \text{i}}{2} =$

$\dfrac{z_{\text{B}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}} = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

b. Le résultat précédent peut s'écrire :

$z_B - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A)$: cette égalité signifie que B est l'image de C dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Le triangle ABC est isocèle en A d'angle au sommet $\dfrac{\pi}{3}$; tous ses angles sont donc égaux et le triangle (ABC) est équilatéral (indirect).

3. **a.** Si M d'affixe z a pour image M' d'affixe z' par r, on a : $z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A)$.
En particulier si O d'affixe 0 a pour image O′ d'affixe $z_{O'}$, alors :
$z_{O'} + 2i = e^{i\frac{\pi}{3}}(0 + 2i)$ ou encore $z_{O'} = -2i + \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (2i) = -2i + i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - i$.

b. On a $z_{O'} + z_C = 0$, ce qui signifie que O est le milieu de [CO′] qui est un diamètre de Γ.

c. L'image de Γ a pour centre l'image de O, soit O′ et pour rayon 2. On trace donc le cercle Γ' de centre O′ et de rayon O′O

d. Le point A appartient à Γ ; c'est le centre de la rotation r ; il est donc invariant et appartient donc à Γ'.
De même le point C appartient à Γ ; son image par r est B qui appartient donc à Γ'.
Les cercles Γ et Γ' ont en commun les points A et B.

4. **a.** $|z| = \left|z + \sqrt{3} + i\right|$ peut s'écrire $|z| = \left|z - \left(-\sqrt{3} - i\right)\right|$ ce qui signifie géométriquement que $OM = O'M \iff M$ est équidistant de O et de O′, c'est-à-dire que M appartient à la médiatrice du segment [OO′] qui est donc l'ensemble (E).

b. Par définition de la rotation r, on a AO = AO′, donc A appartient à (E).
On vient de voir que B appartient au cercle Γ' de rayon 2, donc O′B = 2 = OB. B est donc lui aussi équidistant de O et de O′ : il appartient à (E).

EXERCICE 2 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $z_A = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$, donc
$|z_A|^2 = 6 + 2 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow |z_A| = 2\sqrt{2}$.
On peut en factorisant ce module écrire :
$z_A = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
De même $z_B = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$, donc $|z_B|^2 = 2 + 6 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow |z_B| = 2\sqrt{2}$.
On peut en factorisant ce module écrire :
$z_B = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b. On a $z_B = 2\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
Finalement : $z_B = e^{i\frac{\pi}{2}} z_A$ ce qui montre que le point B est l'image du point A dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, (donc dans le quart-de-tour direct de centre O).
On a donc OA = OB : le triangle est isocèle en O ;
$\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{\pi}{2}$: le triangle est rectangle en O.
Remarque : on pouvait également montrer que $OA = OB = 2\sqrt{2}$, donc le triangle est isocèle et montrer ensuite que $\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$: le triangle OAB est donc rectangle direct en O.

c. Comme $\left(1 + i\sqrt{3}\right)\overline{0} = 0$, le point O est invariant par f. A a pour image A′, B a pour image B′.
L'image par une similitude indirecte du triangle rectangle direct OAB est le triangle indirect, rectangle en O, OA′B′.

d. $z_{A'} = \left(1+i\sqrt{3}\right)\overline{z_A} = \left(1+i\sqrt{3}\right)\overline{\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)} = \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right) = \sqrt{6}+\sqrt{6}-i\sqrt{2}+3i\sqrt{2} = 2\sqrt{6}+2i\sqrt{2} = 2z_A$.

Ce dernier résultat montre que les points O, A et A′ sont alignés et que A est le milieu de [OA′] : A′ est donc le symétrique de O autour de A. Il suffit ensuite de compléter le triangle rectangle en O indirect, OA′B′.

2. a. L'écriture complexe de r est $z' = ze^{i\frac{\pi}{3}}$ et celle de s est $z' = \overline{z}$. L'écriture complexe de $g = r \circ s$ est donc $z' = \overline{z}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. On a $\overline{z}e^{i\frac{\pi}{3}} = 0$, donc O est invariant par g ;

L'image par g de A a pour affixe :

$\overline{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = \left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}+i\sqrt{2} = z_A$. Donc A est lui aussi invariant par g.

c. g composée d'une similitude indirecte et d'une similitude directe est une similitude indirecte ayant deux points invariants distincts : c'est donc la réflexion d'axe (OA).

3. a. L'écriture complexe de f est :

$z' = \left(1+i\sqrt{3}\right)\overline{z} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}$.

On voit donc que f est la composée de la similitude g suivie de l'homothétie h de centre O et de rapport 2, d'écriture complexe $z' = 2z$.

Donc $f = h \circ g$.

b. D'après la question précédente : $f = h \circ g = h \circ (r \circ s)$.

Pour trouver l'image d'un point C par f :

— On construit le symétrique C_1 de C autour de $\left(O, \vec{u}\right)$;
— puis l'image C_2 de C_1 dans la rotation r ;
— et enfin l'image C′ de C_2 par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. a. Le tirage étant simultané le nombre de tirages est celui de 2 boules parmi 5, soit $\binom{5}{2}$.

Le nombre de cas favorables est, les boules vertes étant retirées, égal au nombre de combinaisons de 2 boules rouges choisies parmi 3.

On a donc $p(X=0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10} = 0,3$.

b. On a de même $p(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2\times 3}{10} = \frac{6}{10}$

Enfin $p(X=2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$.

On a donc $E = 0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0,8$.

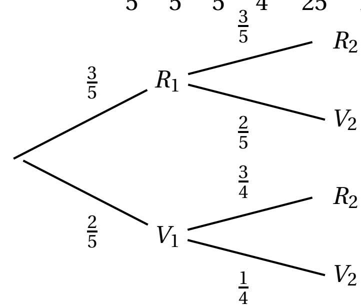
c. Si les deux boules sont rouges $X = 0$ et si les deux boules sont vertes $X = 2$.

Donc $p(A) = p(X=0)+p(X=2) = \frac{3}{10}+\frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

2. **a.**

On a $p(B) = p(V_1) \times p_{V_1}(R_2) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{10}$.

$p(C) = p(R_1) \times p_{R_1}(V_2) + p(V_1) \times p_{V_1}(R_2) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{25} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{27}{50} = \dfrac{54}{100} = 0,54.$



b. Il faut calculer :

$p_C(V_1) = \dfrac{p(C \cap V_1)}{p(C)} = \dfrac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{27}{50}} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{27}{50}} = \dfrac{3}{10} \times \dfrac{50}{27} = \dfrac{15}{27} = \dfrac{5}{9}$.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

   a. Une équation de $\mathscr{P}$ est $1x - 4y + 1z + d = 0$;
   A$(3\ ;\ 1\ ;\ 2) \in \mathscr{P} \iff 3 - 4 + 2 + d = 0 \iff d = -1$.
   Conclusion : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{P} \iff x - 4y + z - 1 = 0$.

   b. On a $\vec{n} \cdot \vec{u} = 1 - 4 + 3 = 0$, ce qui signifie que la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
   Or B est un point de de $\mathscr{D}$ et B$(1\ ;\ 4\ ;\ 2) \in \mathscr{P} \iff 1 - 16 + 2 - 1 = 0 \iff -14 = 0$ qui est fausse. Donc B $\notin \mathscr{P}$.
   Conclusion : la droite $\mathscr{D}$ est parallèle au plan $\mathscr{P}$ et distincte de celui-ci.

2. Intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.

   a. $d(\Omega\ ;\ \mathscr{P}) = \dfrac{|1 - 36 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \dfrac{36}{\sqrt{18}} = \dfrac{36}{3\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$.

   b. Un rayon est $[\Omega\text{A}]$; or $\Omega\text{A}^2 = 2^2 + (-8)^2 + 2^2 = 72 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \Omega\text{A} = 6\sqrt{2}$.
   La distance du point Ω au plan $\mathscr{P}$ est égale au rayon de la sphère, donc le plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère en A.

3. Intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.

   a. $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{D} \iff$ il existe $\alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{\text{B}M} = \alpha \vec{u} \iff$

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x - 1 & = & \alpha \\ y - 4 & = & \alpha \\ z - 2 & = & 3\alpha \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 + \alpha \\ y & = & 4 + \alpha \\ z & = & 2 + 3\alpha \end{array}\right.$$

   b. On a vu que le rayon de la sphère vaut $6\sqrt{2}$. Donc :
   $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{S} \iff \Omega M^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \iff (x-1)^2 + (y-9)^2 + (z-0)^2 = 72 \iff$
   $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{S} \iff x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 18y + 10 = 0$.

c. Si $M(x~;~y~;~z)$ est commun à la droite $\mathscr{D}$ et à la sphère $\mathscr{S}$, ses coordonnées vérifient le système :

$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 1+\alpha\\ y &=& 4+\alpha\\ z &=& 2+3\alpha\\ x^2+y^2+z^2-2x-18y+10 &=& 0\end{array}\right.$ ce qui entraîne que :

$(1+\alpha)^2+(4+\alpha)^2+(2+3\alpha)^2-2(1+\alpha)-18(4+\alpha)+10=0$

$\iff 11\alpha^2+2\alpha-43=0.$

Cette équation du second degré a deux solutions distinctes réelles car $\Delta = 4-4\times 11\times(-43) = 4+1\,892=1\,896>0$.

Conclusion : la droite $\mathscr{D}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ en deux points M et N distincts.

ANNEXE

EXERCICE 2

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

À rendre avec la copie