Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2008

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on considère les points :

A(3 ; −2 ; 1) B(5 ; 2 ; −3) C(6 ; −2 ; −2) D(4 ; 3 ; 2)

1. $\overrightarrow{CA}\,(-3\,;\,0\,;\,3)$ et $\overrightarrow{CB}\,(-1\,;\,4\,;\,-1)$

   $\frac{-3}{-1} \neq \frac{0}{4}$, les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont donc pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

   De plus $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = -3 \times (-1) + 0 \times 4 - 3 \times 1 = 0$, ces vecteurs sont donc orthogonaux et le triangle ABC est rectangle en C.

   Enfin $AC^2 = (-3)^2 + 0^2 + 3^2 = 18$ et $BC^2 = (-1)^2 + 4^2 = (-1)^2 = 18$, ABC est donc isocèle en C.

2. **a.** $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CA} = 2 \times (-3) + 1 \times 0 + 2 \times 3 = 0$

   $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 2 \times (-1) + 1 \times 4 + 2 \times (-1) = 0$

   $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de (ABC), $\vec{n}$ est donc normal à ce plan.

   b. Une équation cartésienne de (ABC) est donc de la forme $2x + y + 2z + d = 0$.
   De plus, le point A appartient à ce plan, ses coordonnées vérifient donc l'équation précédente et $2 \times (3) + 1 \times (-2) + 2 \times 1 + d = 0 \iff d = -6$

   Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc :

   $$2x + y + 2z - 6 = 0$$

   c. La distance de D au plan (ABC) est $d = \dfrac{|2x_D + y_D + 2z_D - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{9}{3} = 3$

3. $$V = \frac{1}{3} \times \text{Base} \times \text{Hauteur}$$

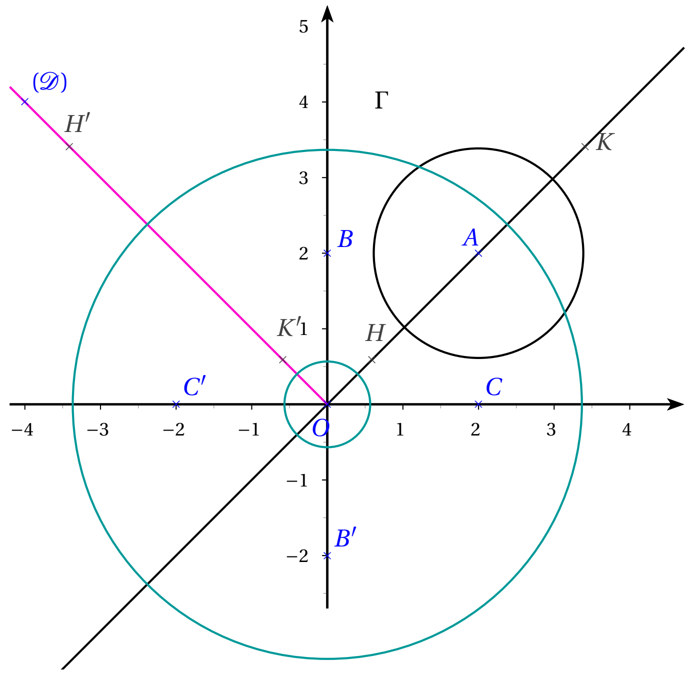
   On prendra pour base ABC (triangle rectangle isocèle d'aire $AB^2 = \dfrac{1}{2} \times 18$), la hauteur est alors d, et le volume de ABCD en unités de volume :

   $$V = \frac{1}{3} \times 9 \times 3 = 9$$

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.**



b. $OA = |z_A| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

O, H, A et K sont alignés dans cet ordre donc $OH = OA - AH = 2\sqrt{2} - 2$ et $OK = OA + AK = 2\sqrt{2} + 2$

c. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ sont colinéaires de même sens donc

$arg(z_{\text{A}}) = arg(z_{\text{H}}) = arg(z_{\text{K}}) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

Donc $z_{\text{K}} = |z_{\text{K}}|\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} = \left(2\sqrt{2}+2\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_{\text{H}} = |z_{\text{H}}|\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}} = \left(2\sqrt{2}-2\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$

2. a. $z_{B'} = \dfrac{-4}{2\text{i}} = 2\text{i}$: l'image de B est B.

$z_{C'} = \dfrac{-4}{2} = -2$: l'image de C est C' d'affixe -2.

b. M(z) est invariant par $f \iff z = \dfrac{-4}{z} \iff z^2 = -4 \iff z = 2\text{i}$ ou $z = -2\text{i}$

Les points invariants pas f sont B et le point d'affixe B'(-2i).

3. a. Pour tout point M distinct de O,

$z' = \dfrac{-4}{z} \iff zz' = -4 \Rightarrow |z| \times |z'| = 4 \Rightarrow OM \times OM' = 4$

b. Déterminer $\arg\left(z'\right)$ en fonction de $\arg(z)$.

Pour tout point M distinct de O,

$z' = \dfrac{-4}{z} \iff zz' = -4 \Rightarrow \arg\left(zz'\right) = \pi \quad [2\pi]$

On a donc $\arg\left(z'\right) = \pi - \arg(z) \quad [2\pi]$

4. a. D'après le 3a. $\text{OK}' = \dfrac{4}{\text{OK}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}+2} = \dfrac{2}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{2\sqrt{2}-2}{1} = 2\left(\sqrt{2}-1\right) = \text{OH}$.

$\text{OH}' = \dfrac{4}{\text{OH}} = \dfrac{4}{2\sqrt{2}-2} = \dfrac{2}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{2\sqrt{2}+2}{3}$

b. On cherche la forme exponentielle de $z_{\text{K}'}$, le module vient d'être calculé et on utilise la question 3b. pour avoir un argument :

$$\begin{aligned} \arg z_{\text{K}'} &= \pi - \arg(z_K) \quad [2\pi] \\ &= \frac{3}{4} \quad [2\pi] \end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$z_{K'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

De même :

$$\begin{aligned}\arg z_{H'} &= \pi - \arg(z_H) \quad [2\pi]\\ &= \frac{3}{4} \quad [2\pi]\end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$z_{H'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

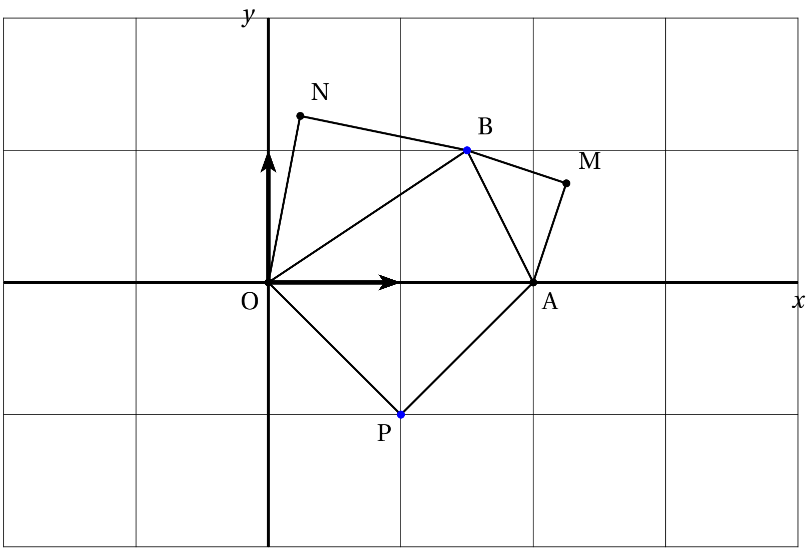
c. $z_{K'}$ et $z_{H'}$ ont pour argument $\frac{3\pi}{4}$, donc K′ et H′ sont sur la demie droite $\mathscr{D}$ en rose sur le graphique. De plus $|z_{K'}| = |z_H| = 2\sqrt{2}-2$ donc K′ appartient aussi au cercle de centre O et rayon OH. De même H′ appartient au cercle de centre O et rayon OK. D'où la construction des deux points!

EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OJ}\right)$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \frac{3}{2} + i$.

On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. À l'aide des transformations

a. $s_1 : \begin{array}{ccc} A & \longmapsto & A \\ M & \longmapsto & B \end{array}$ donc l'angle de s_1 est $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$ et le rapport $\frac{AB}{AM} = \sqrt{2}$ car le triangle AMB est rectangle isocèle direct.

$s_2 : \begin{array}{ccc} O & \longmapsto & O \\ B & \longmapsto & N \end{array}$ donc pour s_2 l'angle est $\frac{\pi}{4}$ et le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b. $M \xmapsto{S_1} B \xmapsto{S_2} N$ donc $r(M) = N$.
$I \xmapsto{S_1} P \xmapsto{S_2} I$ donc $r(I) = I$.

c. r est la composée de deux similitudes directes, c'est donc une similitude directe ; son rapport est le produit des rapports, c'est donc 1 ; son angle, la somme des angles donc $\dfrac{\pi}{2}$. Enfin, le centre est l'unique point invariant, c'est donc I (question précédente).
En résumé, r est la rotation de centre I et angle $\dfrac{\pi}{2}$.

d. L'image de O par r est P.

e. $\left\{\begin{array}{l} O \xmapsto{r} P \\ M \xmapsto{r} N \end{array}\right. \Longrightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{PN})$ = angle de r. D'où le résultat.

2. En utilisant les nombres complexes

a. L'écriture complexe de s_1 est $z' - z_A = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z - z_A)$ soit

$$z' - 2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z-2)$$

L'écriture complexe de s_2 est $z' - z_O = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z - z_O)$ soit

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z$$

b. M est l'antécédent de B par s_1.
$s_1(M) = B \iff \dfrac{3}{2} + \mathrm{i} - 2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(z-2)$
donc $z = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{i} - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \iff 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{i} - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
M a pour affixe $\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}\mathrm{i}$
N est l'image de B par s_2.
$z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\dfrac{3}{2} + \mathrm{i}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{5}{4}\mathrm{i}$

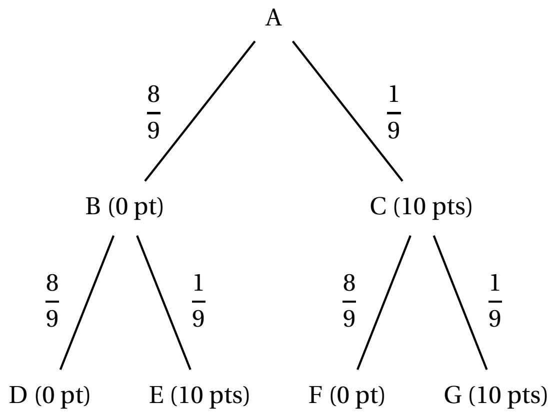
c. $z_{\mathrm{P}} = 1 - \mathrm{i}$

$$\frac{z_{\mathrm{N}} - z_{\mathrm{P}}}{z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{O}}} = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{9}{4}\mathrm{i}}{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\mathrm{i}} = \frac{-1+3\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} = \frac{(-1+3\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{10} = \mathrm{i}$$

Or, $\arg\dfrac{z_{\mathrm{N}} - z_{\mathrm{P}}}{z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{O}}} = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{PN}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$
D'où (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passé par un nœud.
Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.

a. $X(\Omega) = \{0;10;20\}$

$p(X=0) = p(B) \times p_B(D) = \dfrac{8}{9} \times \dfrac{8}{9}$

$p(X=20) = p(B) \times p_B(E) + p(C) \times p_C(F) = \dfrac{8}{9} \times \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9} \times \dfrac{8}{9}$

$p(X=20) = p(C) \times p_C(G) = \dfrac{1}{9} \times \dfrac{1}{9}$

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	10	20	Σ
$p(X = x_i)$	$\dfrac{64}{81}$	$\dfrac{16}{81}$	$\dfrac{1}{81}$	1

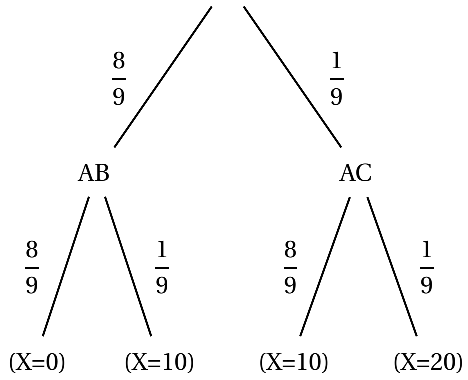
b. On complète le tableau précédent :

x_i	0	10	20	Σ
p_i	$\dfrac{64}{81}$	$\dfrac{16}{81}$	$\dfrac{1}{81}$	1
$x_i p_i$	0	$\dfrac{16 \times 10}{81}$	$\dfrac{20}{81}$	E(X)

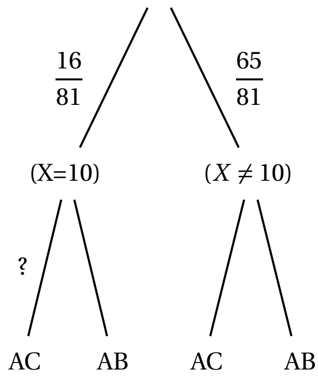
$$E(X) = \frac{180}{81} = \frac{20}{9}$$

c. Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.

On adapte l'arbre précédent puis on l'inverse :



et



On veut $p_{(X=10)}(AC)$

Or, $p(AC\cap(X=10)) = p(AC)\times p_{AC}(X=10) = \dfrac{1}{9}\times\dfrac{8}{9} = \dfrac{8}{81}$

$$p_{(X=10)}(AC) = \dfrac{p(AC\cap(X=10))}{p(X=10)} = \dfrac{\frac{8}{81}}{\frac{16}{81}} = \dfrac{1}{2}$$

2. **a.** On répète 8 fois de façons indépendantes, l'expérience à deux issues « le joueur obtient 20 points » considérée comme succès, de probabilité $\dfrac{1}{81}$ ou pas. On a donc un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire Y prenant pour valeurs le nombre de succès obtenus suit la loi binomiale de paramètres 8 et $\dfrac{1}{81}$. On veut $p(Y=2)$.

$p(Y=2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}\left(\dfrac{1}{81}\right)^2\left(\dfrac{80}{81}\right)^6 = \dfrac{28\times 80^6}{81^8} \approx 0,004$

b. On veut ici $p(Y\geqslant 1)$:

$p(Y\geqslant 1) = 1 - p(Y=0) = 1 - \left(\dfrac{80}{81}\right)^8 \approx 0,095$

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln x - 2 + x.$$

1. $\lim\limits_{x\to 0}\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} -2+x = -2$, par somme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -2+x = +\infty$, par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2. f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ car c'est la somme de deux fonctions strictement croissantes sur $]0\,;\,+\infty[$: $x\longmapsto \ln x$ et $x\longmapsto -2+x$.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

f est continue sur $]0\,;\,+\infty[$ car c'est la somme de deux fonctions continues sur $]0\,;\,+\infty[$: $x\longmapsto \ln x$ et $x\longmapsto -2+x$.

f est donc continue, strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, de plus, 0 est compris entre $\lim\limits_{0} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$, d'après le « théorème de la bijection », l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$.
Avec la calculatrice, on trouve $f(1,55) \approx -0,011$ et $f(1,56) \approx 0,004$.
Le même théorème appliqué à $[1,55 ; 1,56]$ prouve que $1,55 \leqslant \alpha \leqslant 1,56$ (encadrement à 10^{-2} près.)

PARTIE B

1. L'abscisse de E est solution de $\ln x = 2 - x \iff f(x) = 0$.
   D'après la question A3., l'abscisse de E est donc α.

   E a pour coordonnées $(\alpha ; 2 - \alpha)$.

2. **a.** Comme $\alpha > 1$, sur l'intervalle $[1;\alpha]$, la fonction ln est continue et positive, donc I mesure l'aire (en unités d'aire) du domaine limité par les droites d'équations $x = 1$, $x = \alpha$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.

   b. On pose $u(x) = \ln x \quad u'(x) = \dfrac{1}{x}$
   $v'(x) = 1 \quad v(x) = x$
   Les quatre fonctions u, u', v et v' sont continues sur $[1;\alpha]$, on peut intégrer par parties :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\alpha} \ln x \,\mathrm{d}x \\ &= [x\ln x]_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha} x \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha\ln\alpha - [x]_1^{\alpha} \\ &= \alpha\ln\alpha - \alpha + 1 \end{aligned}$$

   Mais $f(\alpha) = 0 \iff \ln\alpha = 2 - \alpha$, on remplace :

$$\begin{aligned} I &= \alpha(2-\alpha) - \alpha + 1 \\ &= -\alpha^2 + \alpha + 1 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \int_1^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\alpha}^{2} (2-x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\alpha^2 + \alpha + 1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{2} \\ &= -\frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha + 3 \end{aligned}$$

EXERCICE 5 **3 points**
Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. **Restitution organisée de connaissances :**
   Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \dfrac{\mathrm{e}^h - \mathrm{e}^0}{h}$
   On reconnait le taux de variation de la fonction exponentielle entre 0 et h, comme cette fonction est dérivable en 0, par définition du nombre dérivé, on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$$

2. Par inverse, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

3. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - \dfrac{1}{x}$
   Par comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = +\infty$
   Enfin, par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

PARTIE B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \frac{1}{n}\left[1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

1. On reconnait la somme des premiers termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 1 et raison $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + \mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \cdots + \mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}} &= \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^0 + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^1 + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{1 - \mathrm{e}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

$$(\mathrm{e}-1)f\left(\frac{1}{n}\right) = (\mathrm{e}-1)\frac{\frac{1}{n}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{1}{n}\,\frac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} = u_n.$$

2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et (question A2.) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, d'après le théorème donnant la limite de la composée d'une suite et d'une fonction, $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$

   Enfin la suite (u_n) converge vers $\mathrm{e} - 1$.