Corrigé du baccalauréat S Métropole - La Réunion
12 septembre 2017

Exercice 1 — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

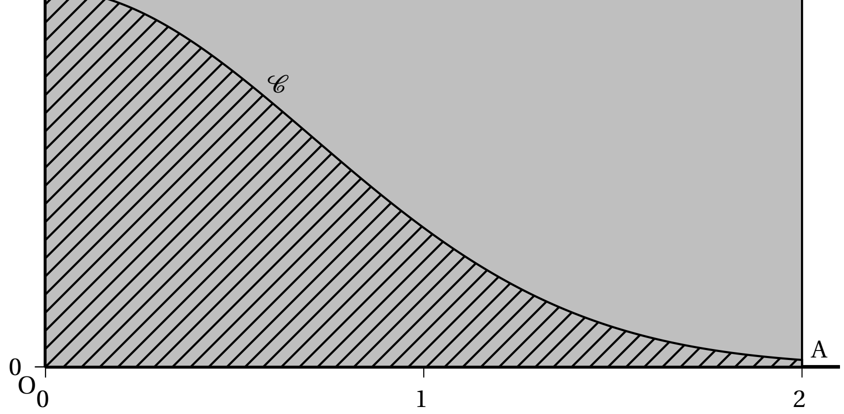
1. **a.** $u_{n+1}-u_n = \displaystyle\int_0^{n+1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

   La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est positive sur $[n\,;\,n+1]$ donc $\displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x > 0$ ce qui entraîne que, pour tout n, $u_{n+1}-u_n > 0$.
   Donc la suite (u_n) est croissante.

   b. Un carré est toujours positif donc, pour tout réel x, $(x-1)^2 \geqslant 0$. On en déduit que $x^2-2x+1 \geqslant 0$ ce qui équivaut à $-2x+1 \geqslant -x^2$ ou encore $-x^2 \leqslant -2x+1$.
   La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc $-x^2 \leqslant -2x+1$ entraîne $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-2x+1}$.
   D'après la positivité de l'intégration, de $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-2x+1}$ on déduit $\displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^n \mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x$.
   La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x+1}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x+1}$ donc
   $\displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x+1}\right]_0^n = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2n+1}-\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{1}\right) = \frac{\mathrm{e}}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2n+1} < \frac{\mathrm{e}}{2}$ car $\mathrm{e}^{-2n+1} > 0$.
   Or $u_n = \displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x$ donc, pour tout n, $u_n < \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

   c. La suite (u_n) est croissante et majorée par $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

2. Dans cette question, on se propose d'obtenir une valeur approchée de u_2.
   Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, et le rectangle OABC où A$(2\,;\,0)$, B$(2\,;\,1)$ et C$(0\,;\,1)$.
   On a hachuré le domaine $\mathscr{D}$ compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.



On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un point M au hasard à l'intérieur du rectangle OABC.

On admet que la probabilité p que ce point appartienne au domaine est : $p = \dfrac{\text{aire de } \mathscr{D}}{\text{aire de OABC}}$.

a. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est positive sur $[0~;~2]$, donc $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

Donc u_2 est l'aire de $\mathscr{D}$.

On sait que $p = \dfrac{\text{aire de } \mathscr{D}}{\text{aire de OABC}}$ donc $p = \dfrac{u_2}{\text{aire de OABC}}$ donc $u_2 = p \times \text{aire de OABC}$.

Le rectangle OABC a pour dimensions 1 et 2 donc son aire est égale à 2.

On en déduit que $u_2 = 2p$.

b. On considère l'algorithme suivant :

L1	**Variables** : N, C nombres entiers ; X, Y, F nombres réels
L2	**Entrée** : Saisir N
L3	**Initialisation** : C prend la valeur 0
L4	**Traitement** :
L5	Pour k variant de 1 à N
L6	X prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 2
L7	Y prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 1
L8	Si $Y \leqslant \mathrm{e}^{-X^2}$ alors
L9	C prend la valeur $C+1$
L10	Fin si
L11	Fin pour
L12	Afficher C
L13	F prend la valeur C/N
L14	Afficher F

i. La condition de la ligne L8 permet de tester si le point $\mathrm{M}(X~;~Y)$ est dans le domaine hachuré.

ii. La valeur F affichée est le rapport du nombre de points dans le domaine sur le nombre total de points; il représente la proportion des points qui sont dans le domaine hachuré.

iii. On conjecture que la valeur de F se rapproche du nombre p lorsque N devient très grand.

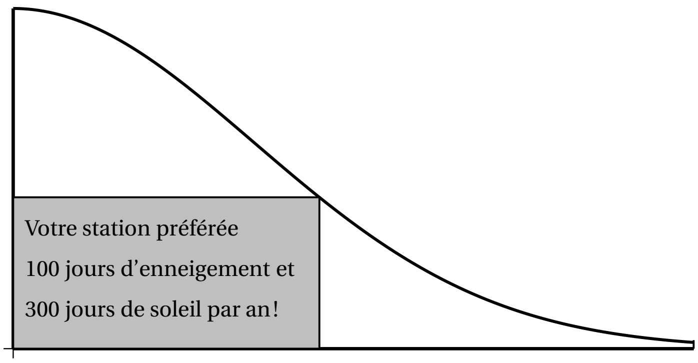
c. En faisant fonctionner cet algorithme pour $N = 10^6$, on obtient $C = 441\,138$.

On admet dans ce cas que la valeur F affichée par l'algorithme est une valeur approchée de la probabilité p à 10^{-3} près.

On a donc $p = \dfrac{441\,138}{10^6} \approx 0{,}441$; donc $u_2 = 2p \approx 0{,}88$.

Partie B

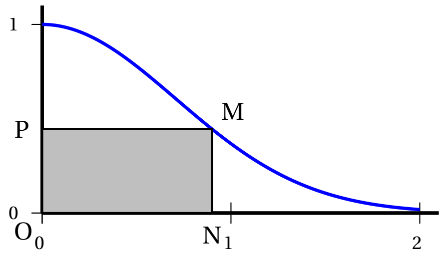
Une entreprise spécialisée est chargée par l'office de tourisme d'une station de ski de la conception d'un panneau publicitaire ayant la forme d'une piste de ski. Afin de donner des informations sur la station, une zone rectangulaire est insérée sur le panneau comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Le panneau, modélisé par le domaine $\mathscr{D}$ défini dans la partie A, est découpé dans une plaque rectangulaire de 2 mètres sur 1 mètre. Il est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$; l'unité choisie est le mètre.

Pour x nombre réel appartenant à l'intervalle $[; 2]$, on note :

- M le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ de coordonnées $\left(x ; \text{e}^{-x^2}\right)$,
- N le point de coordonnées $(x ; 0)$,
- P le point de coordonnées $\left(0 ; \text{e}^{-x^2}\right)$,
- $\mathscr{A}(x)$ l'aire du rectangle ONMP.



1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 2]$, on a : $\mathscr{A}(x) = \text{ON} \times \text{OP} = x_\text{M} \times y_\text{M} = x\,\text{e}^{-x^2}$.

2. On cherche la valeur de x sur $[0 ; 2]$ pour laquelle $\mathscr{A}(x)$ est maximale.

$\mathscr{A}$ est dérivable sur $[0 ; 2]$ et $\mathscr{A}'(x) = 1 \times \text{e}^{-x^2} + x \times (-2x)\,\text{e}^{-x^2} = \left(1 - 2x^2\right)\text{e}^{-x^2}$.

$\left(1 - 2x^2\right) = 0 \iff x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; on étudie le signe de $\mathscr{A}'(x)$ sur $[0 ; 2]$:

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	2
$1-2x^2$	$+$	0	$-$
e^{-x^2}	$+$		$+$
$\mathscr{A}'(x)$	$+$	0	$-$

On en déduit que l'aire maximale est obtenue pour le point M de $\mathscr{C}$ d'abscisse $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Le rectangle ONMP d'aire maximale obtenu à la question 2. doit être peint en bleu, et le reste du panneau en blanc.

L'aire totale sous la courbe est égale à u_2 qui vaut environ 0,88.

Le rectangle d'aire maximale a pour aire $\mathscr{A}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\text{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}43$.

Il faudra donc peindre en bleu une surface d'environ $0{,}88 - 0{,}43 = 0{,}45$ m^2.

Exercice 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{u}, \vec{v}\right)$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -z^2 + 2z$.

1. On résout dans l'ensemble $\mathbf{C}$, $-z^2 + 2z - 2 = 0 \iff z^2 - -2z + 2 = 0 \iff$

$$(z-1)^2 - 1 + 2 = 0 \iff (z-1)^2 + 1 = 0 \iff (z-1)^2 = \text{i}^2 \iff \left\{\begin{array}{rcl} z-1 & = & \text{i} \\ \text{ou} & & \\ z-1 & = & -\text{i} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 1+\text{i} \\ \text{ou} & & \\ z & = & 1-\text{i} \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions complexes est donc $\left\{1 + \text{i} ; 1 - \text{i}\right\}$.

Les points dont les images ont pour affixe 2, vérifient :

$z' = 2 \iff -z^2 + 2z = 2 \iff -z^2 + 2z - 2 = 0$: ce sont donc les points dont les affixes sont les solutions de l'équation ci-dessus.

Les points d'affixe $1 + \text{i}$ et $1 - \text{i}$ ont pour image le point d'affixe réelle 2.

2. On a donc $M(z)$, $M'\left(z' = -z^2 + 2z\right)$ et $N\left(z^2\right)$.

Or $\dfrac{z_N + z_{M'}}{2} = \dfrac{-z^2 + 2z + z^2}{2} = \dfrac{2z}{2} = z$, ce qui montre que M est le milieu du segment $[NM']$.

3. **a.** Puisque O$M = 1$ et que l'un de ses arguments est θ, on sait que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Donc $|z| = 1$.
Donc $|z_N| = \left|z^2\right| = |z|^2 = 1^2 = 1$.
D'autre part on a $\arg(z_N) = \arg\left(z^2\right) = 2\arg(z) = 2\theta$.

b. N appartient au cercle $\mathscr{C}$; on le construit avec le compas de telle sorte que $\widehat{M\mathrm{A}} = \widehat{MN}$, A étant le point d'affixe 1.
Il suffit ensuite de construire le symétrique de N par rapport à M.

c. On a vu que $MN = M\mathrm{A} = MM'$.
En particulier $M\mathrm{A} = MM'$ montre que le triangle AMM' est isocèle en M.
Voir figure page 9.

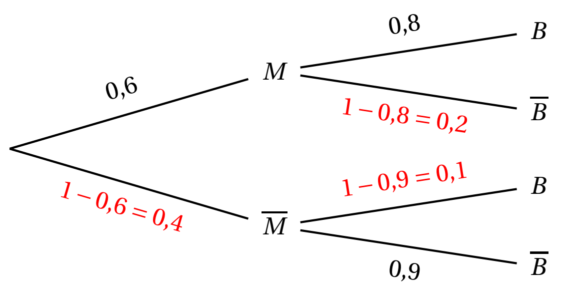
Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. **a.** Selon cette modélisation, la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un taux de cholestérol compris entre 1,04 g/L et 2,64 g/L est $P(1{,}04 \leqslant T \leqslant 2{,}64) \approx 0{,}954$.
On obtient ce résultat à la calculatrice ou en appliquant un résultat du cours puisque :
$P(1{,}04 \leqslant T \leqslant 2{,}64) = P(1{,}84 - 2\times 0{,}4 \leqslant T \leqslant 1{,}84 + 2\times 0{,}4) = P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma)$.

b. Selon cette modélisation la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans cette population ait un taux de cholestérol supérieur à 1,2 g/L est $P(1{,}2 \leqslant T) \approx 0{,}945$ (résultat obtenu à la calculatrice).

2. **a.** On traduit les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré :



b. d'après la formule des probabilités totales, la probabilité de l'évènement B est :
$P(B) = P(M\cap B) + P\left(\overline{M}\cap B\right) = 0{,}6\times 0{,}8 + 0{,}4\times 0{,}1 = 0{,}48 + 0{,}01 = 0{,}52$.

c. La probabilité qu'un patient ait pris le médicament sachant que son taux de cholestérol a baissé est :
$P_B(M) = \dfrac{P(M\cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}48}{0{,}52} \approx 0{,}923$.

3. Le laboratoire qui produit ce médicament annonce que 30 % des patients qui l'utilisent présentent des effets secondaires. Afin de tester cette hypothèse, un cardiologue sélectionne de manière aléatoire 100 patients traités avec ce médicament.

a. $n = 100 \geqslant 30$; $p = 30\,\% = 0{,}3$ donc $np = 100\times 0{,}3 = 30 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 100\times 0{,}7 = 70 \geqslant 5$.
Les conditions sont vérifiées donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de patients suivant ce traitement et présentant des effets secondaires :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}3 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}3\times 0{,}7}}{\sqrt{100}}\ ;\ 0{,}3 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}3\times 0{,}7}}{\sqrt{100}}\right]$$
$$\approx [0{,}210\ ;\ 0{,}390].$$

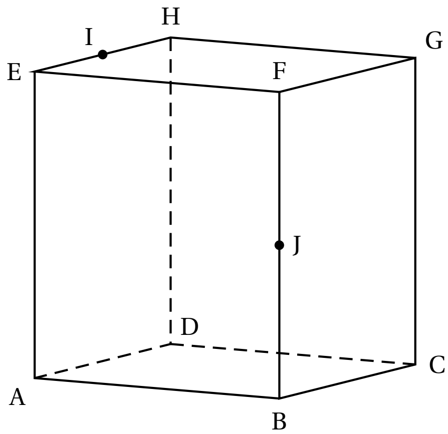
b. L'étude réalisée auprès des 100 patients a dénombré 37 personnes présentant des effets secondaires. $f = \dfrac{37}{100} = 0{,}37 \in I$ donc, au risque de 5 %, on peut dire que l'échantillon étudié ne contredit pas l'annonce du laboratoire.

c. Pour estimer la proportion d'utilisateurs de ce médicament présentant des effets secondaires, un organisme indépendant réalise une étude basée sur un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %.
Cette étude aboutit à une fréquence observée de $f = 37\%$ de patients présentant des effets secondaires, et à un intervalle de confiance qui ne contient pas la fréquence 30 %.
Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % d'une fréquence f dans un échantillon de taille n est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Il s'agit donc de trouver la plus petite valeur de n telle que $0{,}3 \notin \left[0{,}37 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ 0{,}37 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ donc telle que $0{,}3 < 0{,}37 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$; on résout cette inéquation :
$0{,}3 < 0{,}37 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \iff \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}07 \iff \sqrt{n} > \dfrac{1}{0{,}07} \iff n > \left(\dfrac{1}{0{,}07}\right)^2$
$\left(\dfrac{1}{0{,}07}\right)^2 \approx 204{,}1$ donc il faut un échantillon d'au moins 205 personnes pour cette étude.

Exercice 4 — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.
On note I et J les milieux respectifs des segments [EH] et [FB].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



Les coordonnées des sommets du cube sont A $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, D $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, E $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, F $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, G $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, H $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. I, milieu de [EH], a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1/2\\1\end{pmatrix}$ et J, milieu de [FB], a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\1/2\end{pmatrix}$.

2. a. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + (-2) \times 1 + 2 \times 1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{BG}$
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BI} = 1 \times (-1) + (-2) \times \dfrac{1}{2} + 2 \times 1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{BI}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BI}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (BGI). Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (BGI) donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

b. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (BGI) donc le plan (BGI) a une équation de la forme $x-2y+2z+d=0$ où d est un réel à déterminer.

Le point B appartient au plan (BGI) donc $x_B-2y_B+2z_B+d=0$ ce qui équivaut à $1-0+0+d=0$ et donc $d=-1$.

Le plan (BGI) a pour équation $x-2y+2z-1=0$.

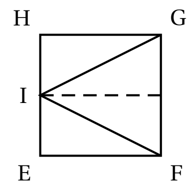
c. Le point K, milieu du segment [HJ], a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\dfrac{0+1}{2}\\ \dfrac{1+0}{2}\\ \dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3}{4}\end{pmatrix}$

On regarde si les coordonnées de K vérifient l'équation du plan (ABC) :

$x_K-2y_K+2z_K-1=\dfrac{1}{2}-2\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{4}-1=0$ donc K appartient au plan (BGI).

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.

a. Le triangle FIG est isocèle de sommet principal I. Sa hauteur issue de I vaut 1 et sa base FG vaut 1.



Donc son aire est égale à $\dfrac{1\times 1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre FBIG est donc $\mathcal{V}=\dfrac{1}{3}$ (aire de FIG) $\times$ BF $=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{6}$.

b. Soit Δ la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI). Le plan a $\overrightarrow{n}$ pour vecteur normal donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

La droite Δ passe par le point F de coordonnées $(1~;~0~;~1)$ donc a pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl}x&=&1+t\\ y&=&-2t\\ z&=&1+2t\end{array}\right.\quad t\in\mathbf{R}$.

c. La droite Δ coupe le plan (BGI) en F′ dont les coordonnées sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcl}x&=&1+t\\ y&=&-2t\\ z&=&1+2t\\ x-2y+2z-1&=&0\end{array}\right.$$

On cherche t qui vérifie $(1+t)-2(-2t)+2(1+2t)-1=0$ c'est-à-dire

$1+t+4t+2+4t-1=0 \iff 9t=-2 \iff t=-\dfrac{2}{9}$.

On en déduit $\left\{\begin{array}{rcccccl}x&=&1+t&=&1-\dfrac{2}{9}&=&\dfrac{7}{9}\\ y&=&-2t&=&-2\times\left(-\dfrac{2}{9}\right)&=&\dfrac{4}{9}\\ z&=&1+2t&=&1+2\times\left(-\dfrac{2}{9}\right)&=&\dfrac{5}{9}\end{array}\right.$. Le point F′ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\dfrac{7}{9}\\ \dfrac{4}{9}\\ \dfrac{5}{9}\end{pmatrix}$.

d. $\text{FF}'^2=\left(\dfrac{7}{9}-1\right)^2+\left(\dfrac{4}{9}-0\right)^2=\left(\dfrac{5}{9}-1\right)^2=\dfrac{4}{81}+\dfrac{16}{81}+\dfrac{16}{81}=\dfrac{36}{81}=\dfrac{4}{9}$ donc $\text{FF}'=\dfrac{2}{3}$.

On calcule d'une deuxième façon le volume du tétraèdre FBIG : $\mathcal{V}=\dfrac{1}{3}\times$ (aire de BGI) $\times$ FF′ ce qui équivaut à $\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}\times$ (aire de BGI) $\times\dfrac{2}{3}$ ce qui entraîne que l'aire de BGI est égale à $\dfrac{3}{4}$.

Exercice 4 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 5 ; −2), B(7 ; −1 ; 3) et C(−2 ; 7 ; −2) et on note P le plan (ABC).
On cherche une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ sous la forme : $ax + by + cz = 73$, où a, b et c sont des nombres réels.

On note X et Y les matrices colonnes : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Si le plan (ABC) a pour équation $ax + by + cz = 73$, alors les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation du plan, c'est-à-dire : $\left\{\begin{array}{rcl} ax_A + by_A + cz_A & = & 73 \\ ax_B + by_B + cz_B & = & 73 \\ ax_C + by_C + cz_C & = & 73 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a + 5b - 2c & = & 73 \\ 7a - b + 3c & = & 73 \\ -2a + 7b - 2c & = & 73 \end{array}\right.$

$$MX = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 5b - 2c \\ 7a - b + 3c \\ -2a + 7b - 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 73 \\ 73 \end{pmatrix} = 73 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 73Y.$$

2. Soit la matrice : $N = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M \times N$ et $N \times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

Pour $M \times N$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

Pour $N \times M$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

Si on appelle I la matrice unité d'ordre 3, la calculatrice montre que $MN = NM = 73I$ donc que $M\left(\dfrac{1}{73}N\right) = \left(\dfrac{1}{73}N\right)M = I$.

Cela prouve que la matrice M est inversible et que son inverse est $M^{-1} = \dfrac{1}{73}N$.

3. $MX = 73Y \iff M^{-1}MX = M^{-1} \times 73Y \iff X = \dfrac{1}{73}N \times 73Y \iff X = NY$

$$X = NY \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 + 4 - 13 \\ -8 + 6 + 17 \\ -47 + 17 + 36 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Le plan $\mathscr{P}$ a donc pour équation $10x + 15y + 6z = 73$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan P ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

1. Soit M$(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$. On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs.

a. Si $z = 3$ et $10x+15y+6z = 73$, alors $10x+15y+6\times3 = 73$, donc $10c+15y = 55 \iff 2x+3y = 11$.
Donc $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation $2x+3y = 11$.

b. $2 \times 7 + 3 \times (-1) = 14 - 3 = 11$ donc le couple $(7\ ;\ -1)$ est solution de (E).

- Si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors $2x + 3y = 11$. De plus, on sait que $2 \times 7 + 3 \times (-1) = 14 - 3 = 11$. En retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient : $2(x-7) + 3(y+1) = 0$ ou encore $2(x-7) = -3(y+1)$.

  On peut donc dire que le nombre 3 divise le produit $2(x-7)$; comme 2 et 3 sont premiers entre eux, on peut dire, d'après le théorème de Gauss, que 3 divise $x-7$. On peut donc écrire $x - 7 = 3k$ avec $k \in \mathbf{Z}$ ou encore $x = 7 + 3k$.

  De $2(x-7) = -3(y+1)$ et $x - 7 = 3k$, on tire $2 \times 3k = -3(y+1)$ ce qui entraîne $2k = -y - 1$ ou encore $y = -1 - 2k$.
- Réciproquement, si $x = 7 + 3k$ et $y = -1 - 2k$ avec $k \in \mathbf{Z}$, alors $2x + 3y = 2(7+3k) + 3(-1-2k) = 14 + 6k - 3 - 6k = 11$, donc le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensemble des couples $(7 + 3k\ ;\ -1 - 2k)$ où $k \in \mathbf{Z}$.

c. D'après les questions précédentes, les points appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels sont à chercher parmi les couples $(7 + 3k\ ;\ -1 - 2k)$ où $k \in \mathbf{Z}$.

On cherche donc k de $\mathbf{Z}$ tel que $7 + 3k \in \mathbf{N}$ et $-1 - 2k \in \mathbf{N}$.

Il faut donc que $7 + 3k \geqslant 0$ et que $-1 - 2k \geqslant 0$, c'est-à-dire $k \geqslant -\dfrac{7}{3}$ et $k \leqslant -\dfrac{1}{2}$. Les deux seules valeurs possibles sont donc

- $k = -2$ ce qui donne $x = 7 + 3(-2) = 1$ et $y = -1 - 2(-2) = 3$ donc le couple $(1\ ;\ 3)$;
- $k = -1$ ce qui donne $x = 7 + 3(-1) = 4$ et $y = -1 - 2(-1) = 1$ donc le couple $(4\ ;\ 1)$.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.

a. $10x + 15y + 6z = 73$ donc $15y = 73 - 10x - 6z$

73 est un nombre impair, $10x$ et $6z$ sont deux nombres pairs, donc $73 - 10x - 6z$ est un nombre impair. On en déduit que $15y$ est un nombre impair ; il faut pour cela que y soit impair sinon $15y$ serait pair.

b. $10x + 15y + 6z = 73$ donc $10x = 73 - 15y - 6z$

$$\left.\begin{array}{l} 10 = 3 \times 3 + 1 \equiv 1\ [3] \implies 10x \equiv x\ [3] \\ \left.\begin{array}{lcl} 73 = 3 \times 24 + 1 & \implies & 73 \equiv 1\ [3] \\ 15 = 5 \times 3 \equiv 0\ [3] & \implies & 15y \equiv 0\ [3] \\ 6 = 2 \times 3 \equiv 0\ [3] & \implies & 6z \equiv 0\ [0] \end{array}\right\} \implies 73 - 15y - 6z \equiv 1\ [3] \end{array}\right\} \implies x \equiv 1\ [3]$$

c. On pose alors : $x = 1 + 3p$, $y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$, où p, q et r sont des entiers naturels.

$$\begin{aligned} M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{P} &\iff 10x + 15y + 6y = 73 \iff 10(1+3p) + 15(1+2q) + 6(3+5r) = 73 \\ &\iff 10 + 30p + 15 + 30q + 18 + 30r = 73 \iff 30p + 30q + 30r = 30 \\ &\iff p + q + r = 1. \end{aligned}$$

d. On cherche les triplets $(1 + 3p\ ;\ 1 + 2q\ ;\ 3 + 5r)$ où p, q et r sont des entiers naturels tels que $p + q + r = 1$. Il existe trois solutions :

- $p = 1$, $q = 0$ et $r = 0$, donc $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (4\ ;\ 1\ ;\ 3)$;
- $p = 0$, $q = 1$ et $r = 0$, donc $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (1\ ;\ 3\ ;\ 3)$;
- $p = 0$, $q = 0$ et $r = 1$, donc $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (1\ ;\ 1\ ;\ 8)$.

Ce sont les coordonnées des trois points de $\mathscr{P}$ à coordonnées dans $\mathbf{N}$.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2