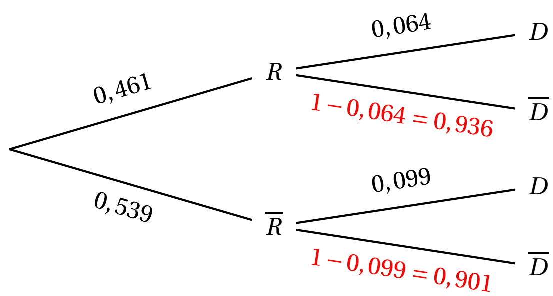
Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion 12 septembre 2016

EXERCICE 1 — COMMUN À TOUS LES CANDIDATS — 6 POINTS

Partie 1

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.
En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.
On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :
R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,
D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

1. On traduit cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité :



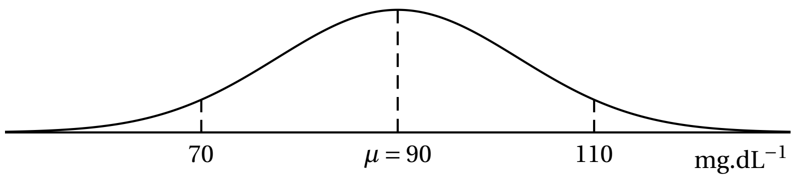
2. **a.** La probabilité que la personne interrogée soit diabétique est $P(D)$.
D'après la formule des probabilités totales :
$$P(D) = P(R\cap D) + P\left(\overline{R}\cap D\right) = P(R)\times P_R(D) + P\left(\overline{R}\right)\times P_{\overline{R}}(D)$$
$$= 0,461\times 0,064 + 0,539\times 0,099 = 0{,}029\,304 + 0{,}053\,361 = 0{,}082\,865$$
$$\approx 0,083$$

   b. La personne choisie est diabétique. La probabilité qu'elle habite en zone rurale est $P_D(R)$:
$$P_D(R) = \frac{P(D\cap R)}{P(D)} = \frac{0{,}029\,504}{0{,}082\,865} \approx 0,356$$

Partie 2

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL^{-1} et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg. dL^{-1}. La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg. dL^{-1} et 110 mg.dL^{-1}. Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.rdL^{-1} ne font pas l'objet d'un suivi particulier.
On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est 0,052 à 10^{-3} près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à 0,052.

On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL^{-1}, d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X.



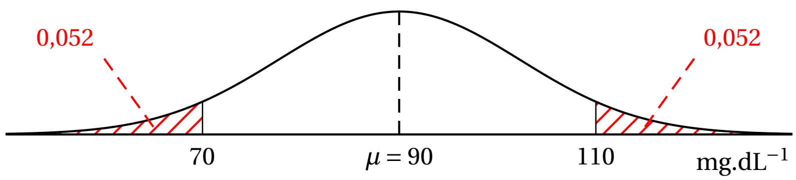
1. La glycémie « normale » est entre 70 et 110 mg.dL^{-1} ; la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » est donc $P(70 \leqslant X \leqslant 110)$.

La probabilité qu'un adulte soit en hyperglycémie est 0,052 donc $P(X > 110) = 0,052$.

D'après la courbe donnée dans le texte, la moyenne μ est de 90 donc, pour des raisons de symétrie, comme $70 = 90 - 20$ et que $110 = 90 + 20$, $P(X < 70) = P(X > 110)$ et donc, $P(X < 70) = P(X > 110) = 0,052$.

$P(70 \leqslant X \leqslant 110) = 1 - P(X < 70) - P(X > 110) = 1 - 2 \times 0,052 = 0,896$

La probabilité qu'un adulte ait une glycémie « normale » est 0,896.



2. La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type σ.

D'après le cours, on peut dire que la variable aléatoire $Z = \dfrac{X - 90}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

On a vu que $P(X < 70) = 0,052$.

Comme $\sigma > 0$, $X < 70 \iff X - 90 < -20 \iff \dfrac{X-90}{\sigma} < -\dfrac{20}{\sigma} \iff Z < -\dfrac{20}{\sigma}$

$P(X < 70) = 0,052 \iff P\left(Z < -\dfrac{20}{\sigma}\right) = 0,052.$

On sait que la variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite ; si $P(Z < \beta) = 0,052$, on trouve à la calculatrice $\beta \approx -1,626$.

On a donc $-\dfrac{20}{\sigma} \approx -1,626$ ce qui donne $\sigma \approx \dfrac{20}{1,626}$ soit $\sigma \approx 12,3$.

La valeur de σ arrondie au dixième est 12,3.

3. Dans cette question, on prend $\sigma = 12$.

La probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie est $P(X < 60)$.

À la calculatrice, pour la variable aléatoire X qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 90$ et $\sigma = 12$, on trouve $P(X < 60) \approx 0,006$.

La probabilité, arrondie au millième, que la personne choisie soit en hypoglycémie est 0,006.

Partie 3

Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10 000 personnes.

Dans l'échantillon étudié, 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.

1. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % d'une fréquence f dans un échantillon de taille n est :
$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
La fréquence de personnes diagnostiquées diabétiques dans l'échantillon proposé de taille $n=10000$ est $f=\dfrac{716}{10000}=0,0716$.
On obtient l'intervalle $\left[0,0716-\dfrac{1}{\sqrt{10000}}\ ;\ 0,0716+\dfrac{1}{\sqrt{10000}}\right]=[0,0616\ ;\ 0,0816]$.
On peut donc dire que la probabilité que l'intervalle $[0,0616\ ;\ 0,0816]$ contienne la proportion d'adultes diabétiques dans la population totale est supérieure à 0,95.

2. L'amplitude de l'intervalle $\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.
Pour que cette amplitude soit inférieure ou égale à 0,01, il faut trouver n pour que $\dfrac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0,01$ ce qui équivaut à $200\leqslant\sqrt{n}$ ou encore $n\geqslant 40000$.
Il faut donc avoir un échantillon de taille supérieure ou égale à 40 000 pour que l'intervalle de confiance ait une amplitude inférieure ou égale à 0,01.

EXERCICE 2 COMMUN À TOUS LES CANDIDATS 4 POINTS

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n\geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1}=1-\dfrac{1}{z_n}$.

1. a. Dans cette question, on suppose que $z_0=2$.
$z_1=1-\dfrac{1}{z_0}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$; $z_2=1-\dfrac{1}{z_1}=1-2=-1$; $z_3=1-\dfrac{1}{z_2}=1-\dfrac{1}{-1}=1+1=2$;
ensuite on retrouve $z_4=\dfrac{1}{2}$, $z_5=-1$ et $z_6=2$.

b. Dans cette question, on suppose que $z_0=\mathrm{i}$.
$z_1=1-\dfrac{1}{\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$; $z_2=1-\dfrac{1}{z_1}=1-\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}=1-\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+1}=\dfrac{2-1+\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$;
$$z_3=1-\frac{1}{z_2}=1-\frac{1}{\frac{1+\mathrm{i}}{2}}=1-\frac{2}{1+\mathrm{i}}=\frac{1+\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}}=\frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-1+1+\mathrm{i}+\mathrm{i}}{1+1}=\mathrm{i}=z_0\ ;$$
ensuite on retrouve $z_4=z_1=1+\mathrm{i}$, puis $z_5=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ et $z_6=\mathrm{i}$.

c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.
Des résultats de la question précédente, on peut conjecturer que $z_{3n}=z_0$, pour $n\in\mathbb{N}$.
On démontre cette conjecture par récurrence sur n :

- **Initialisation :** on a bien $z_{3\times 0}=z_0$. L'égalité est vraie au rang 0.
- **Hérédité :** supposons que pour $n\in\mathbb{N}$, $z_{3n}=z_0$, alors

$$z_{3(n+1)}=z_{3n+3}=1-\frac{1}{z_{3n+2}}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{z_{3n+1}}}=1-\frac{z_{3n+1}}{z_{3n+1}-1}=\frac{z_{3n+1}-1-z_{3n+1}}{z_{3n+1}-1}$$
$$=\frac{-1}{z_{3n+1}-1}=\frac{-1}{1-\frac{1}{z_{3n}}-1}=\frac{-1}{-\frac{1}{z_{3n}}}=z_{3n}=z_0.$$

- **Conclusion :** on a donc démontré que $z_{3\times 0} = z_0$ et si $z_{3n} = z_0$, alors $z_{3(n+1)} = z_0$: d'après le principe de récurrence on a démontré que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $z_{3n} = z_0$.

2. Comme $2016 = 3 \times 672$, on a d'après la question précédente $z_{2016} = z_0 = 1 + \text{i}$.

3. On a $z_0 = z_1 \iff z_0 = 1 - \dfrac{1}{z_0}$ (avec $z_0 \neq 0$) ou encore

$z_0^2 = z_0 - 1 \iff z_0^2 - z_0 + 1 = 0 \iff \left(z_0 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0 \iff \left(z_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \iff \left(z_0 - \frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z_0 - \frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l c l} z_0 - \frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & = & 0 \\ z_0 - \frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} z_0 & = & \frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_0 & = & \frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Il y a donc deux valeurs de z_0 pour lesquelles $z_1 = z_0$.

Dans ces deux cas, $z_2 = 1 - \dfrac{1}{z_1} = 1 - \dfrac{1}{z_0} = z_1$, et ainsi de suite, donc les suites (z_n) sont constantes.

EXERCICE 3 CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ 5 POINTS

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :       a, b, d, s sont des entiers
                  i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :  a prend la valeur 0
                  b prend la valeur 0
                  Saisir n
Traitement :      Pour i allant de 1 à n faire
                  | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6
                  | Si d ⩽ 2
                  |     | alors a prend la valeur 1 − a
                  |     | sinon Si d ⩽ 4
                  |     |           | alors b prend la valeur 1 − b
                  |     |          FinSi
                  | FinSi
                  | s prend la valeur a + b
                  FinPour
Sortie :          Afficher s
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4.

variables	i	d	a	b	s
initialisation			**0**	**0**	
1^er^ passage boucle Pour	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
2^e^ passage boucle Pour	**2**	**6**	**1**	**0**	**1**
3^e^ passage boucle Pour	**3**	**4**	**1**	**1**	**2**

b. Les variables a et b sont à 0 ou 1 selon que la pièce montre le côté face ou le côté pile ; la variable $s = a + b$ donne donc le nombre de pièces qui sont du côté pile.

À la fin de cet algorithme, $s = 2$ donc les deux pièces sont du côté pile.

2. Pour tout entier naturel n, on note :

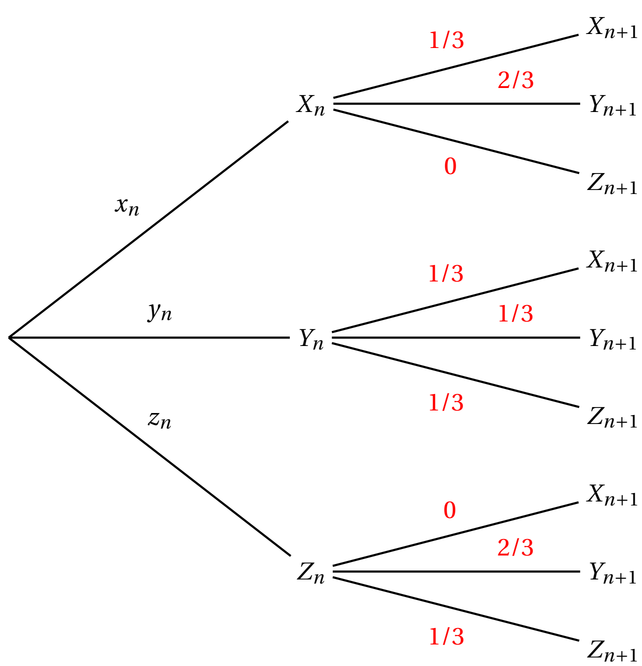
- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

a. Au début du jeu les deus pièces sont du côté face donc $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

b. X_{n+1} est l'événement « À l'issue de $n+1$ lancers de dés, les deux pièces sont du côté face » ; on cherche donc la probabilité que, à l'issue de $n+1$ lancers, les deux pièces soient du côté face sachant qu'à l'issue de n lancers elles étaient déjà les deux du côté face. Il faut donc qu'il n'y ait aucun retournement de pièce lors du $n+1$-ième lancer, c'est-à-dire qu'il faut que le dé tombe sur 5 ou 6 ; la probabilité de l'événement $\{5 ; 6\}$ est $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ puisque le dé est bien équilibré et donc qu'il y a équiprobabilité. Donc $P_{X_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

c. On complète l'arbre proposé :



d. Pour tout entier naturel n, $x_n + y_n + z_n = 1$ donc $z_n = 1 - x_n - y_n$.

e. D'après la formule des probabilités totales :

$$y_{n+1} = P(Y_{n+1}) = P(X_n \cap Y_{n+1}) + P(Y_n \cap Y_{n+1}) + P(Z_n \cap Y_{n+1}) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}z_n$$

$$= \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}(1 - x_n - y_n) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_n - \frac{2}{3}y_n = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}$$

f. On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \frac{1}{2}$ donc $y_n = b_n + \frac{1}{2}$.

$b_{n+1} = y_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(b_n + \frac{1}{2}\right) + \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{3}b_n - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}b_n - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}b_n$

$b_0 = y_0 - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = -\frac{1}{2}$.

On peut donc dire que, pour tout n, $b_n = b_0 \times q^n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Comme $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, on en conclut que, pour tout n, $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

g. La suite (b_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$; comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on sait que la suite (b_n) est convergente vers 0.

Or, pour tout n, $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, donc la suite (y_n) est convergente vers $\frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \frac{1}{2}$.

Donc à long terme, la probabilité d'avoir une piède côté face et une pièce côté pile va tendre vers 0,5.

EXERCICE 3 CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ 5 POINTS

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 3 pièces A, B et C ayant chacune un côté pile et un côté face.

Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on retourne la pièce C.

Au début du jeu, les 3 pièces sont toutes du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face et 1 code le côté pile. Si a code un côté de la pièce A, alors $1 - a$ code l'autre côté de la pièce A.

```
Variables :       a, b, c, d, s sont des entiers naturels
                  i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :  a prend la valeur 0
                  b prend la valeur 0
                  c prend la valeur 0
                  Saisir n
Traitement :      Pour i allant de 1 à n faire
                  | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris
                  | entre 1 et 6
                  | Si d ⩽ 2
                  |    | alors a prend la valeur 1 – a
                  |    | sinon Si d ⩽ 4
                  |    |          | alors b prend la valeur 1 – b
                  |    |          | sinon c prend la valeur 1 – c
                  |    |        FinSi
                  | FinSi
                  | s prend la valeur a + b + c
                  FinPour
Sortie :          Afficher s
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 4 et 2.

On complète le tableau :

variables	i	d	a	b	c	s
initialisation			**0**	**0**	**0**	
1er passage boucle Pour	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
2e passage boucle Pour	**2**	**4**	**1**	**1**	**0**	**2**
3e passage boucle Pour	**3**	**2**	**0**	**1**	**0**	**1**

b. Les variables a, b et c sont à 0 ou 1 selon que la pièce montre le côté face ou le côté pile ; la variable $s = a + b + c$ donne donc le nombre de pièces qui sont du côté pile.

Après une exécution de n tirages, les trois pièces sont du côté pile si $s = 3$.

2. Pour tout entier naturel n, on note :

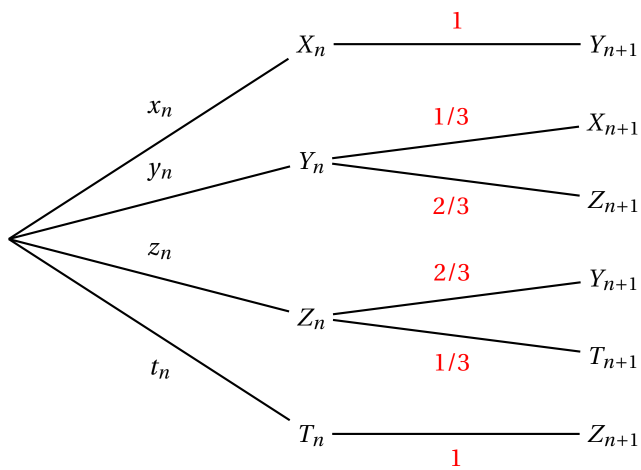
- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une seule pièce est du côté pile et les autres sont du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, exactement deux pièces sont du côté pile et l'autre est du côté face »
- T_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = p(X_n)$; $y_n = p(Y_n)$; $z_n = p(Z_n)$ et $t_n = p(T_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n, Z_n et T_n.

a. Au début du jeu, les trois pièces sont du côté face donc $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ et $t_0 = 0$.

b.
- À chaque tirage, on retourne une pièce et une seule ; donc si les trois pièces sont du côté face après le n-ième tirage, il y aura une et une seule pièce du côté pile après le $n+1$-ième tirage. On en déduit que $P_{X_n}(Y_{n+1}) = 1$.
- Par un raisonnement analogue, on démontre que $P_{T_n}(Z_{n+1}) = 1$.
- Si après le n-ième tirage, il y a une seule pièce du côté pile, il y a deux possibilités :
  - c'est cette pièce qui est retournée lors du $n+1$-ième tirage, avec une probabilité de $\dfrac{1}{3}$, et donc $P_{Y_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$;
  - c'est une des deux autres pièces qui est retournée, avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$, et donc $P_{Y_n}(Z_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$.
- Par un raisonnement analogue, on démontre que $P_{Z_n}(Y_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$ et que $P_{Z_n}(T_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

On peut donc compléter l'arbre proposé :



3. Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n & t_n\end{pmatrix}$.

a. $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & t_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

b. On cherche la matrice carrée M telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n \times M$.
D'après l'arbre et le théorème des probabilités totales, on peut dire que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & \frac{1}{3}y_n \\ y_{n+1} & = & x_n + \frac{2}{3}z_n \\ z_{n+1} & = & \frac{2}{3}y_n + t_n \\ t_{n+1} & = & \frac{1}{3}z_n \end{array}\right.$$

Cela s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} & t_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n & t_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Et donc $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = U_0 \times M^n$.
Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $U_n = U_0 \times M^n$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, $M^0 = I_4$ la matrice identité d'ordre 4.
  $U_0 \times M^0 = U_0 \times I_4 = U_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**
  On suppose la propriété vraie pour un rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $U_p = U_0 \times M^p$.
  $U_{p+1} = U_p \times M = U_0 \times M^p \times M = U_0 \times M^{p+1}$ donc la propriété est vraie au rang $p+1$; elle est donc héréditaire.
- **Conclusion**
  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout n, $U_n = U_0 \times M^n$.

5. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$x_n = \frac{(-1)^n + 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8}\ ; \qquad y_n = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n - (-1)^n\times 3 + 3}{8}$$

$$z_n = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + (-1)^n\times 3 + 3}{8}\ ; \qquad t_n = \frac{-(-1)^n + 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8}$$

a. La probabilité qu'au bout de 5 lancers de dés, une seule des trois pièces soit du côté pile est y_5.

$$y_5 = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^5 + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^5 - (-1)^5\times 3 + 3}{8} = \frac{61}{81} \approx 0,753.$$

b.
- **Première affirmation**
  « À l'issue d'un nombre pair de lancers de dés, les pièces peuvent être toutes les trois du côté pile ».

  On veut savoir si, à l'issue d'un nombre pair de lancers, on peut avoir $t_n = 1$.
  Si n est pair, alors $(-1)^n = 1$ et $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; on en déduit que $t_n = 0$.

  Donc l'affirmation est **fausse**.

- **Deuxième affirmation**
  « Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à $\dfrac{1}{4}$ ».

  On a vu que si n était pair, t_n valait 0 qui est inférieur à $\dfrac{1}{4}$.
  Si n est impair, $(-1)^n = -1$ et $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

  Donc $t_n = \dfrac{1 - 3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - 3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 1}{8} = \dfrac{2 - 6\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{8} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n < \dfrac{1}{4}$
  Donc l'affirmation est **fausse**.

- **Troisième affirmation**
  « Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à 0,249 ».

  On calcule t_n pour quelques valeurs de n :

n	1	2	3	4	5	6	7
t_n	0	0	0,222 22	0	0,246 91	0	0,249 65

$t_7 > 0,249$ donc l'affirmation est **vraie**.

Remarque

On a vu plus haut que, pour n impair, $t_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ est convergente et a pour limite $\dfrac{1}{4}$.

Donc il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n > 0,249$.

La suite (t_n) coïncide avec la suite (u_n) pour tous les n impairs.

Donc si n_0 est impair, $t_{n_0} = u_{n_0} > 0,249$.

Et si n_0 est pair, on prend $n_1 = n_0 + 1$ et $t_{n_1} = u_{n_1} > 0,249$.

Les suites extraites ne sont certes pas au programme de terminale S mais cet exemple est assez facile à comprendre pour un élève attentif. Et puis, c'est tellement plus joli qu'avec la calculatrice !

Enfin ce raisonnement permet de dire qu'il existe un rang à partir duquel $t_n > 0,249\,999$.

EXERCICE 4 — COMMUN À TOUS LES CANDIDATS — 5 POINTS

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $v_1(t) = 5 \times \dfrac{\mathrm{e}^{0,3t}-1}{\mathrm{e}^{0,3t}+1}$.

1. La fonction v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$v_1'(t) = 5 \times \frac{0,3\,\mathrm{e}^{0,3t}\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)-\left(\mathrm{e}^{0,3t}-1\right)\times\left(0,3\,\mathrm{e}^{0,3t}\right)}{\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)^2} = 5 \times \frac{0,3\,\mathrm{e}^{0,3t}\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1-\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)}{\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)^2}$$
$$= 5 \times \frac{0,3\,\mathrm{e}^{0,3t}\times 2}{\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)^2} = \frac{3\,\mathrm{e}^{0,3t}}{\left(\mathrm{e}^{0,3t}+1\right)^2}$$
Pour tout t, $\mathrm{e}^{0,3t} > 0$ donc $v_1(t) > 0$ donc la fonction v_1 est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.
On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s^{-1}.
On résout l'inéquation $v_1(t) < 6$:
$$v_1(t) < 6 \iff 5 \times \frac{\mathrm{e}^{0,3t}-1}{\mathrm{e}^{0,3t}+1} < 6 \iff 5 \times \frac{\mathrm{e}^{0,3t}-1}{\mathrm{e}^{0,3t}+1} - 6 < 0$$
$$\iff \frac{5\,\mathrm{e}^{0,3t}-5-6\,\mathrm{e}^{0,3t}-6}{\mathrm{e}^{0,3t}+1} < 0 \iff \frac{-\,\mathrm{e}^{0,3t}-11}{\mathrm{e}^{0,3t}+1} < 0$$
Pour tout t, $\mathrm{e}^{0,3t} > 0$ donc $-\,\mathrm{e}^{0,3t}-11 < 0$ et $\mathrm{e}^{0,3t}+1 > 0$, donc l'inéquation est toujours vérifiée : $v_1(t) < 6$ pour tout t. Donc le colis ne risque pas d'être endommagé si le parachute s'ouvre normalement.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.
On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en m.s^{-1}), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $v_2(t) = 32,7\left(1-\mathrm{e}^{-0,3t}\right)$.

1. La vitesse, exprimée en m.s^{-1}, atteinte par le colis au bout de 10 secondes est $v_2(10)$:
$$v_2(t) = 32,7\left(1-\mathrm{e}^{-0,3\times 10}\right) \approx 31,1.$$
La valeur approchée à 10^{-1} de vitesse atteinte par le colis au bout de 10 secondes est 31,1 m.s^{-1}.
2. On résout l'équation $v_2(t) = 30$ m.s^{-1}.
$$v_2(t) = 30 \iff 32,7\left(1-\mathrm{e}^{-0,3t}\right) = t \iff 1-\mathrm{e}^{-0,3t} = \frac{30}{32,7}$$
$$\iff 1-\frac{30}{32,7} = \mathrm{e}^{-0,3t} \iff \frac{2,7}{32,7} = \mathrm{e}^{-0,3t}$$
$$\iff \ln\left(\frac{2,7}{32,7}\right) = -0,3t \iff \frac{\ln\left(\frac{2,7}{32,7}\right)}{-0,3} = t$$
$\dfrac{\ln\left(\frac{2,7}{32,7}\right)}{-0,3} \approx 8,3$ donc au bout d'environ 8,3 secondes, le colis atteint la vitesse de 30 m.s^{-1}.

3. On sait que la chute du colis dure 20 secondes.
On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $d(T) = \displaystyle\int_0^T v_2(t)\,\mathrm{d}t$.

a. $d(T) = \displaystyle\int_0^T v_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T 32,7\left(1 - \mathrm{e}^{-0,3t}\right)\mathrm{d}t$

La fonction v_2 a pour primitive la fonction $t \longmapsto 32,7\left(t - \dfrac{\mathrm{e}^{-0,3t}}{-0,3}\right)$;

on a $32,7\left(t - \dfrac{\mathrm{e}^{-0,3t}}{-0,3}\right) = 32,7\left(t + \dfrac{\mathrm{e}^{-0,3t}}{0,3}\right) = \dfrac{32,7}{0,3}\left(0,3t + \mathrm{e}^{-0,3t}\right) = 109\left(0,3t + \mathrm{e}^{-0,3t}\right)$.

Donc $d(T) = \left[109\left(0,3t + \mathrm{e}^{-0,3t}\right)\right]_0^T = 109\left(0,3T + \mathrm{e}^{-0,3T}\right) - 109\left(0 + \mathrm{e}^{-0,3\times 0}\right) = 109\left(\mathrm{e}^{-0,3T} + 0,3T - 1\right)$.

b. Le colis atteint le sol au bout de 20 secondes donc la distance qu'il parcourt est

$$d(20) = 109\left(\mathrm{e}^{-0,3\times 20} + 0,3\times 20 - 1\right) \approx 545 \text{ m.}$$

4. Le temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres est la valeur de T solution de l'équation $d(T) = 700$.
On étudie les variations de la fonction d sur $[0\,;\,+\infty[$:
$d'(T) = 109\left(-0,3\,\mathrm{e}^{-0,3T} + 0,3\right) = 32,7\left(1 - 0,3\,\mathrm{e}^{-0,3T}\right)$
$T \geqslant 0 \implies -0,3T \leqslant 0 \implies \mathrm{e}^{-0,3T} \leqslant 1 \implies 1 - 0,3\,\mathrm{e}^{-0,3T} \geqslant 0 \implies d'(T) \geqslant 0$
Donc la fonction d est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
Or $d(0) = 0 < 700$ et $d(30) \approx 872 > 700$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires on peut dire que l'équation $d(T) = 700$ admet une solution unique α sur $[0\,;\,30[$:

$\left.\begin{array}{rcl} d(24) & \approx & 675,9 < 700 \\ d(25) & \approx & 708,6 > 700 \end{array}\right\} \implies \alpha \in [24\,;\,25]$ $\quad$ $\left.\begin{array}{rcl} d(24,7) & \approx & 698,8 < 700 \\ d(24,8) & \approx & 702,0 > 700 \end{array}\right\} \implies \alpha \in [24,7\,;\,24,8]$

Le temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres est comprise entre 24,7 et 24,8 secondes.