METROPOLE SEPTEMBRE 2011

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à 0,12.

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin.

On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation?

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation?

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ, est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout réel positif t , $p(Y \leq t) = \int_0^t \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$.

Dans les questions 1, 2, 3, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1. Exprimer $p(Y \leq 1)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ. Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}128$.

2. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?

3. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?

4. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces moteurs est égale à $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$ où F est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $F(t) = \int_0^t \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, dx$

a. Calculer $F(t)$ en fonction de t .

b. En déduire la valeur de d_m. On arrondira à 10^{-1}.

EXERCICE 2 6 points Commun à tous les candidats

Partie A - Étude du signe d'une fonction

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 + 4 \ln x$.

1. Déterminer le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

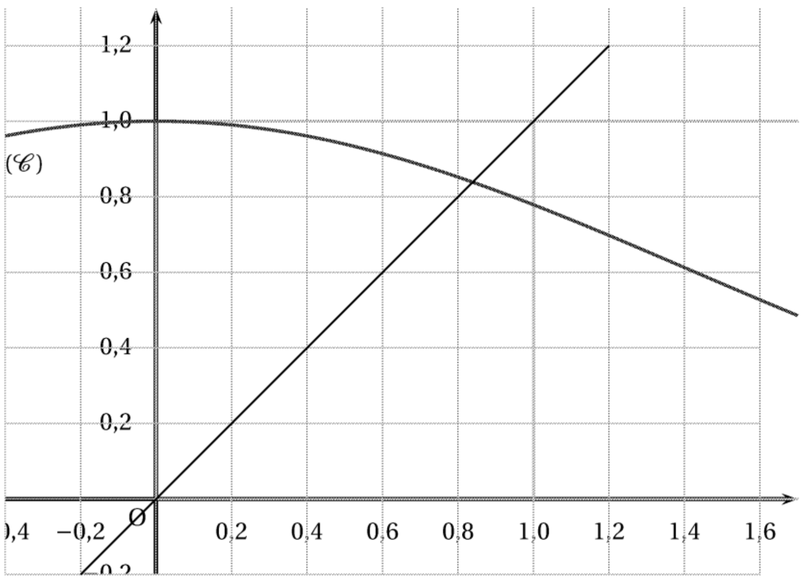
3. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel strictement positif x.

Partie B - Une valeur approchée du réel α défini dans la partie A

Sur le graphique fourni ci-dessous, on a tracé une partie de la courbe représentative (C) de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^{-\frac{1}{4}x^2}$$

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



1. Vérifier que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

2. Au moyen de la courbe (C) et de la droite d'équation $y = x$, représenter les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

3. On admet que pour tout entier naturel n,

$$u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}.$$

En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimales de u_n et u_{n+1} sont identiques.

En déduire que 0,838 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C - Un problème de distance

On appelle (Γ) la courbe représentative, dans un repère orthonormal, de la fonction φ définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2 \ln x.$$

L'objectif de cette partie est de démontrer que parmi les points de la courbe (Γ), il y en a un et un seul qui est plus proche de l'origine O que tous les autres.

1. Soient M un point de la courbe (Γ) et x son abscisse. Exprimer OM en fonction de x.

2. a. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par $h(x) = x^2 + 4(\ln x)^2$.
Étudier les variations de la fonction h. On pourra utiliser la partie A.
b. En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe (Γ) tel que pour tout point M de (Γ), distinct de A, on ait $\mathrm{O}M > \mathrm{OA}$.
3. Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente T_A à la courbe (Γ) au point A.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On désigne par a, b, c, d quatre réels tels que le vecteur $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ soit différent du vecteur nul.
On appelle P le plan d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$.
Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ où A et B sont deux points quelconques du plan P.

Partie B - Questionnaire à choix multiples

Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie ainsi que la justification de ce choix.
Il est attribué 1 *point si la réponse est exacte et justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.
On désigne par P le plan d'équation cartésienne $2\,x - y + 3\,z = 0$ et par A et B les deux points du plan P de coordonnées respectives $(1\,;2\,;0)$ et $(0\,;3\,;1)$.

1. Soient C, D, E les points de coordonnées respectives $(1\,;1\,;-1)$, $(-1\,;4\,;2)$, $(1\,;5\,;1)$.
- **a.** Les points A, B, C définissent le plan P.
- **b.** Les points A, B, D définissent le plan P.
- **c.** Les points A, B, E définissent le plan P.

2. La droite D est définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.
- **a.** La droite D est perpendiculaire au plan P.
- **b.** La droite D est strictement parallèle au plan P.
- **c.** La droite D est incluse dans le plan P.

3. Soit S la sphère de centre Ω, de coordonnées $(2\,;5\,;1)$, et de rayon $\dfrac{1}{2}$. L'ensemble des points communs à la sphère S et au plan P est :
- **a.** vide,
- **b.** constitué d'un seul point,
- **c.** un cercle.

EXERCICE 3 5 points Enseignement obligatoire

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.
On désigne par A le point d'affixe i et par f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{z - \mathrm{i}}{\bar{z} + \mathrm{i}}$.

1. Calculer l'affixe du point B', image du point B d'affixe $2 - \mathrm{i}$ par l'application f.
Placer les points B et B' sur une figure que l'on fera sur la copie.
2. Démontrer que l'application f n'admet pas de point invariant. On rappelle qu'un point invariant est un point confondu avec son image.
3. a. Vérifier que, pour tout nombre complexe z, $\overline{z - \mathrm{i}} = \bar{z} + \mathrm{i}$.
b. Démontrer que $\mathrm{O}M' = 1$ et interpréter géométriquement ce résultat.
c. Démontrer que pour tout point M distinct de A, $(\vec{u}\,,\overrightarrow{\mathrm{O}M'}) = 2(\vec{u}\,;\overrightarrow{\mathrm{A}M}) + 2k\pi$ où k est un entier relatif.
d. En déduire une méthode de construction de l'image M' d'un point quelconque M distinct de A.

4. Soit (d) la droite passant par le point A et dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
a. Dessiner la droite (d).
b. Déterminer l'image par l'application f de la droite (d) privée du point A.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de moteurs tombant en panne pendant la première année d'utilisation
On a une succession de 20 expériences aléatoires identiques et indépendantes. Chacune d'elles a deux issues :

- le moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation ($p = 0,12$)
- le moteur ne tombe pas en panne pendant la première année d'utilisation ($q = 1 - p = 0,88$)

donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres (20 ; 0,12).

1. $p(\mathrm{X} = 2) = \binom{20}{2} \times 0,12^{2} \times 0,88^{20-2} = 0.274$

2. $p(\mathrm{X} \geq 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) = 1 - 0,88^{20} = 0.922$

Partie B

Pour tout réel positif t, $p(Y \leq t) = \int_0^t \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

1. $p(Y \leq 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$.
La probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à 0,12 donc $1 - \mathrm{e}^{-\lambda} = 0,12$
$\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - 0,12$ donc $-\lambda = \ln 0,88$ donc $\lambda = -\ln 0,88$ soit $\lambda \approx 0,128$.

2. $p(Y > 3) = 1 - p(Y \leq 3) = \mathrm{e}^{-3\lambda}$ donc la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans est 0,681

3. Y suit une loi de durée de vie sans vieillissement donc la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an est $p(Y > 3) = 0,681$

4. *a.* Soit $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & v(x) = -\mathrm{e}^{-\lambda x} \end{cases}$ donc $\int_0^t \lambda\, x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \left[-x\, \mathrm{e}^{-\lambda x} \right]_0^t - \int_0^t -\mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$

$F(t) = -t\, \mathrm{e}^{-\lambda t} - \left[\frac{1}{\lambda} \mathrm{e}^{-\lambda x} \right]_0^t = -t\, \mathrm{e}^{-\lambda t} - \left(\frac{1}{\lambda} \mathrm{e}^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} \right)$

b. $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} t\, \mathrm{e}^{-\lambda t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = \frac{1}{\lambda}$

$d_m = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,128}$ donc $d_m \approx 7,8$. En moyenne, sur un grand nombre de moteurs vendus le moteur tombe en panne au bout de 7,8 années.

EXERCICE 2 6 points Commun à tous les candidats

Partie A - Étude du signe d'une fonction

1. $f'(x) = 2x + \dfrac{4}{x}$ or $x > 0$ donc $f'(x) > 0$ (somme de termes positifs).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction f est définie continue strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ donc 0 est compris entre $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3.

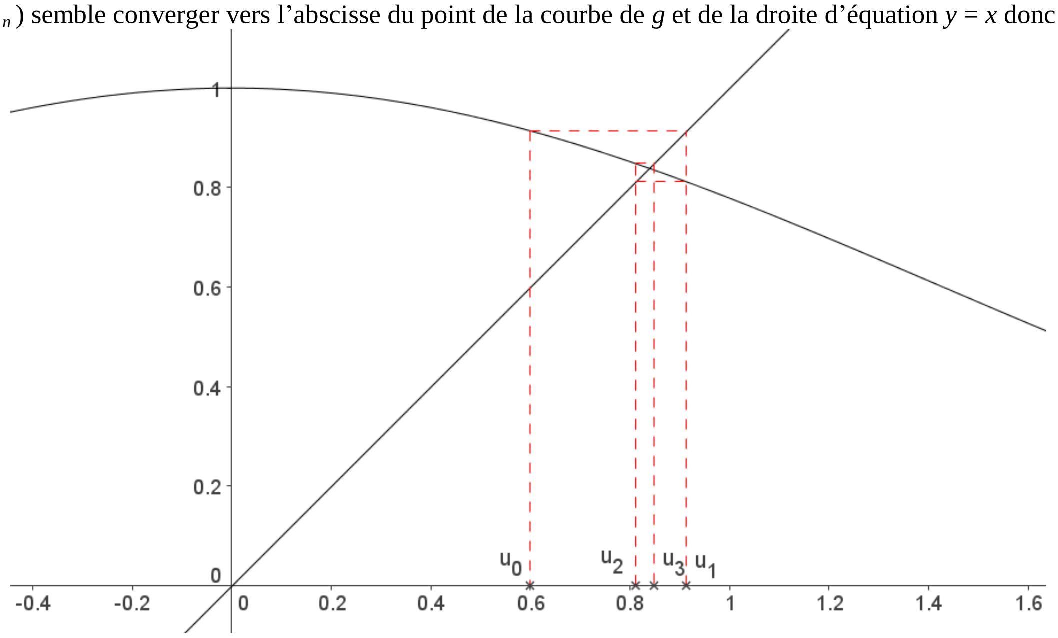
x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B - Une valeur approchée du réel α défini dans la partie A

1. $g(x) = x \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{4}x^2} = x \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}x^2 = \ln x \Leftrightarrow x^2 = -4\ln x \Leftrightarrow x^2 + 4\ln x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

L'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ donc α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

2. La suite (u_n) semble converger vers l'abscisse du point de la courbe de g et de la droite d'équation $y = x$ donc vers α.



3. $u_5 \approx 0{,}84031$ et $u_6 \approx 0{,}83817$ et $u_7 \approx 0{,}83893$ donc le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimales de u_n et u_{n+1} sont identiques est 6.

Pour tout entier naturel n, $u_{2n} \leqslant \alpha \leqslant u_{2n+1}$.donc si $n = 3$: $u_6 \leqslant \alpha \leqslant u_7$.

$u_6 - 0{,}838$ $0 < \alpha - 0{,}838 < u_7 - 0{,}838$ soit $0 < \alpha - 0{,}838 < 0{,}00093$ donc $0 < \alpha - 0{,}838 < 10^{-3}$ donc 0,838 est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Partie C - Un problème de distance

1. M est un point de la courbe (Γ) et x son abscisse donc M a pour coordonnées $(x ; 2\ln x)$. $OM^2 = x^2 + 4(\ln x)^2$.

$OM = \sqrt{x^2 + 4(\ln x)^2}$

2. *a.* $h'(x) = 2x + 8 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = 2\,\dfrac{x^2 + 4\ln x}{x} = 2\,\dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + (\ln x)^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} x^2 + (\ln x)^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

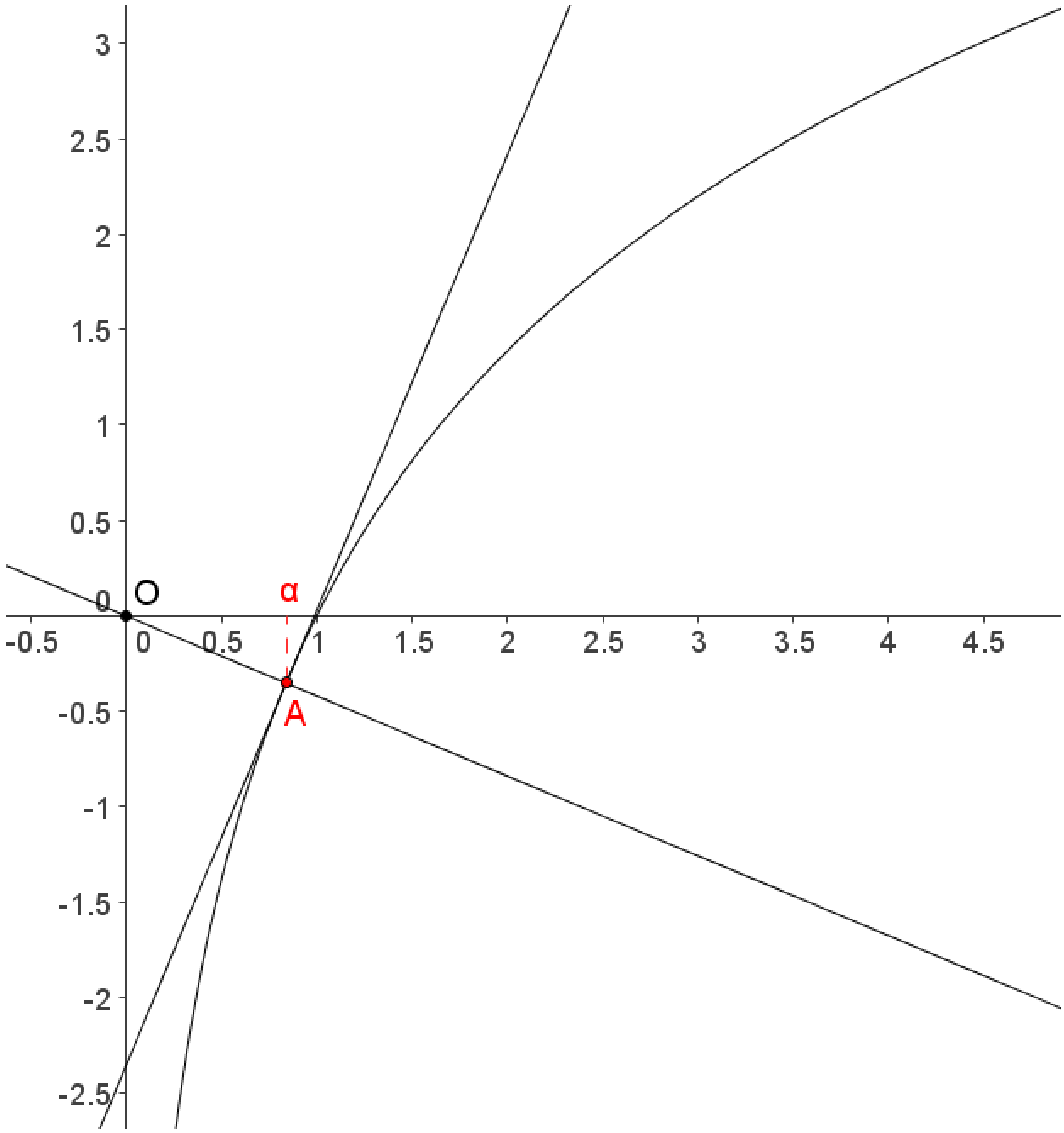
b. La fonction h est strictement décroissante sur $]\,0\,;\,\alpha\,]$ et strictement croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty\,[$ donc admet un seul minimum pour $x = \alpha$.

Si $x \in\,]\,0\,;\,+\infty\,[$ et $x \neq \alpha$ alors $h(x) > h(\alpha)$.

Il existe un unique point A $(\alpha\,;\,\varphi(\alpha))$ de la courbe (Γ) tel que pour tout point M de (Γ), distinct de A, on ait OM > OA.

3. la tangente T_A à la courbe (Γ) au point A est la droite de coefficient directeur $\varphi'(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha}$ donc admet pour vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1\,;\dfrac{2}{\alpha} \end{pmatrix}$

La droite (OA) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{OA}$ $(\alpha\,;\,\varphi(\alpha))$. $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{OA} = \alpha + \dfrac{4\ln\alpha}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2 + 4\ln\alpha}{\alpha}$ or α est solution de $f(x) = 0$ donc $\alpha^2 + 4\ln\alpha = 0$ donc $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{OA} = 0$ donc la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente T_A à la courbe (Γ) au point A.



(figure non demandée)

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point quelconque du plan P alors $a\,x_A + b\,y_A + c\,z_A + d = 0$.
Soit B (x_B ; y_B ; z_B) un point quelconque du plan P alors $a\,x_B + b\,y_B + c\,z_B + d = 0$

donc $a\,(x_A - x_B) + b\,(y_A - y_B) + c\,(z_A - z_B) = 0$ or $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ($x_A - x_B$; $y_A - y_B$; $z_A - z_B$) donc $\vec{n}\ \ \overrightarrow{AB} = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques du plan *P*.

Partie B - Questionnaire à choix multiples

1. Réponse ***b.***

Les coordonnées de A, B et D vérifient l'équation du plan P donc les points A,B et D appartiennent au plan P.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (– 1 ; 1 ; 1) et $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées (– 2 ; 2 ; 2), ces deux vecteurs sont non colinéaires et ont la même origine donc les points A, B, C définissent le plan P.

2. Réponse ***b.***

Soit M (1 – t ; t ; 2 + t) un point de D avec $t \in \mathbb{R}$.

2 (1 – t) – t + 3 (2 + t) = 4 donc la droite D n'a aucun point d'intersection avec P. La droite D est strictement parallèle au plan *P*.

La droite D est définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + t \end{cases}$

3. Réponse ***a.***

La distance de Ω à P est égale à $\dfrac{|2\,x_\Omega - y_\Omega + 3\,z_\Omega|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

$\dfrac{2}{\sqrt{14}} > \dfrac{1}{2}$ donc l'ensemble des points communs à la sphère S et au plan P est vide.

EXERCICE 3 5 points Enseignement obligatoire

1. B' a pour affixe $\dfrac{(2-\mathrm{i})-\mathrm{i}}{\overline{2+\mathrm{i}}+\mathrm{i}} = \dfrac{2-2\,\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}+\mathrm{i}} = \dfrac{2(1-\mathrm{i})}{2} = 1-\mathrm{i}$

2. Un point invariant est un point confondu avec son image donc $z' = z$ soit $z\,(\overline{z} + \mathrm{i}) = z - \mathrm{i}$ donc $z\,\overline{z} = -\,\mathrm{i}$
$z\,\overline{z} = |z|^2$ est le module du complexe z donc un réel positif donc l'équation $z\,\overline{z} = -\,\mathrm{i}$ n'a pas de solution.
L'application f n'admet pas de point invariant.

3. *a.* Pour tout nombre complexe z, $\overline{z-\mathrm{i}} = \overline{z} - \overline{\mathrm{i}} = \overline{z} + \mathrm{i}$.

b. $OM' = |z'| = \left|\dfrac{z-\mathrm{i}}{\overline{z}+\mathrm{i}}\right| = \dfrac{|z-\mathrm{i}|}{|\overline{z}+\mathrm{i}|} = \dfrac{|z-\mathrm{i}|}{|\overline{z-\mathrm{i}}|} = 1$ (le module d'un complexe est égal au module de son conjugué).
OM' = 1 donc M' appartient au cercle de centre O de rayon 1.

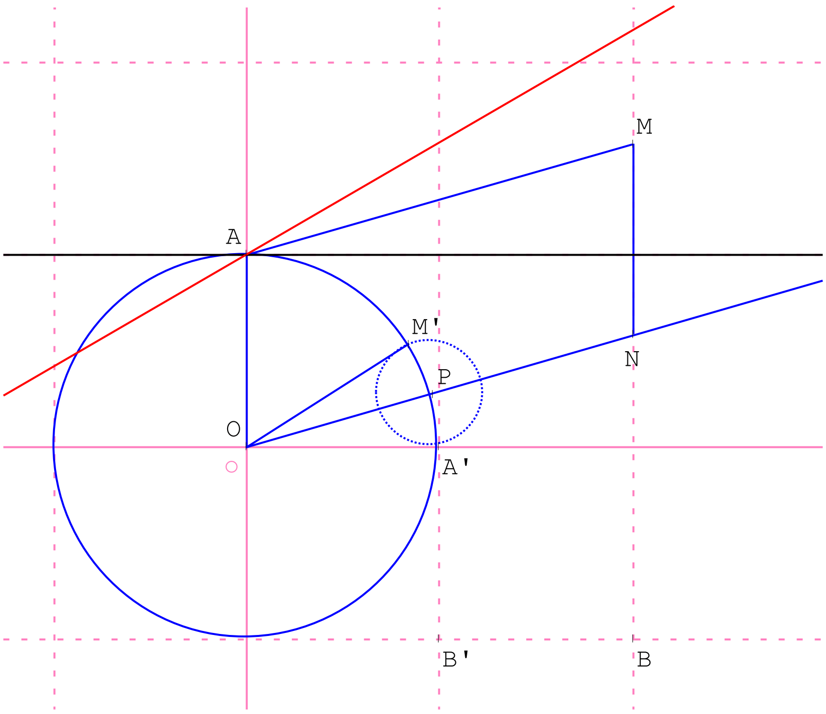
c. Pour tout point M distinct de A, $z' \neq 0$ donc $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM'}) = \arg(z') + 2\,k\,\pi$ où k est un entier relatif.

$\arg(z') = \arg\left(\dfrac{z-\mathrm{i}}{\overline{z}+\mathrm{i}}\right) + 2\,k\,\pi$ donc $\arg(z') = \arg(z-\mathrm{i}) - \arg(\overline{z} + \mathrm{i}) + 2\,k\,\pi$

or $\overline{z}+\mathrm{i} = \overline{z-\mathrm{i}}$ donc $\arg(\overline{z} + \mathrm{i}) = -\arg(z-\mathrm{i}) + 2\,k\,\pi$ donc $\arg(z') = 2\arg(z-\mathrm{i}) + 2\,k\,\pi$

Pour tout point M distinct de A, $\arg(z-\mathrm{i}) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) + 2\,k\,\pi$ donc $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM'}) = 2(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) + 2\,k\,\pi$ où k est un entier relatif.

d. Soit un point quelconque M distinct de A, construisons le point N sommet du parallélogramme MAON.
la demi-droite (ON) coupe le cercle de centre O de rayon 1 en un point P telle que $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{OP}) + 2\,k\,\pi$
Construisons le point M' tel que $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM'}) = 2(\vec{u}\,;\overrightarrow{OP}) + 2\,k\,\pi$,
M' appartient également au cercle de centre O de rayon 1 et $(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM'}) = 2(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) + 2\,k\,\pi$ donc M' est l'image de M



4. *a.* Soit (d) la droite passant par le point A et dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Soit M un point de (d) distinct de A alors $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{6} + k\,\pi$

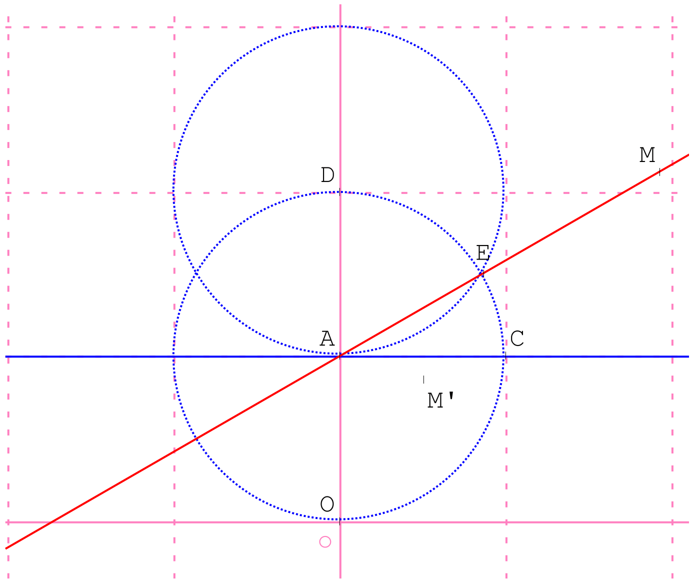
La droite (d) passe par A et fait un angle de $\dfrac{\pi}{6}$ avec l'axe des réels d'où la droite (d) en rouge sur le graphique.

b. Déterminer l'image par l'application f de la droite (d) privée du point A.

$(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{6} + k\,\pi$ donc $\arg(z-\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{6} + k\,\pi$ donc tout point M de (d) distinct de A a pour affixe $z = \mathrm{i} + k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ avec k réel non nul.

donc $z - \mathrm{i} = k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $\overline{z} + \mathrm{i} = -\,\mathrm{i} + k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} + \mathrm{i} = k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc $\dfrac{z-\mathrm{i}}{\overline{z}+\mathrm{i}}\ \dfrac{k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}{k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$

Tout point M de (d) est transformé en le point M' d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.


M
D
E
A
C
M'
O