Durée : 4 heures

Baccalauréat S Métropole & La Réunion septembre 2009

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+4\right).$$

PARTIE A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   a. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
   b. Montrer que sur l'intervalle $[2~;~3]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α.
   Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1}.
   c. Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

PARTIE B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

1. À partir de u_0, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
2. Placer le point I de la courbe $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse α.
3. a. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   b. Démontrer que la suite (u_n) converge.
   c. Déterminer sa limite.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.

1. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-1=0$ et par $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $y+z-2=0$.
   Justifier que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants et vérifier que leur intersection est la droite $\mathscr{D}$, dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l} x = 1-t \\ y = t \\ z = 2-t \end{array}\right.$, où t désigne un nombre réel.

2. **a.** Déterminer une équation du plan $\mathcal{R}$ passant par le point O et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$.
   b. Démontrer que le point I, intersection du plan $\mathcal{R}$ et de la droite $\mathcal{D}$, a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1).
3. Soient A et B les points de coordonnées respectives $\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et (1 ; 1 ; 0).
   a. Vérifier que les points A et B appartiennent au plan $\mathcal{R}$.
   b. On appelle A′ et B′ les points symétriques respectifs des points A et B par rapport au point I.
   Justifier que le quadrilatère ABA' B' est un losange.
   c. Vérifier que le point S de coordonnées (2 ; −1 ; 3) appartient à la droite $\mathcal{D}$.
   d. Calculer le volume de la pyramide SABA′B′.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide de base d'aire b et de hauteur h est : $V = \dfrac{1}{3} b \times h$.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

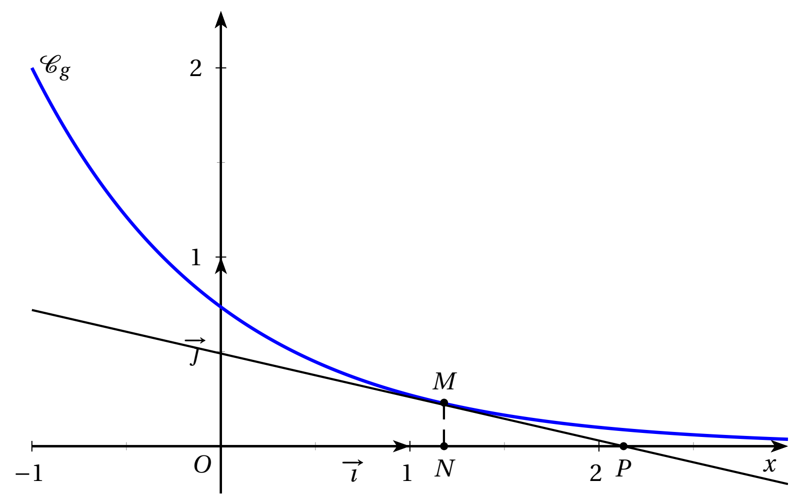
PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = \mathrm{e}^x$.
On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point P d' abscisse $a - 1$.
2. Soit N le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses. Démontrer que $\overrightarrow{NP} = -\vec{\imath}$

PARTIE B

Soit g une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout nombre réel x.
On appelle $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit a un nombre réel. On considère le point M de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse a et le point N projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses.
Soit P le point d'intersection de la tangente T_a à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point M avec l'axe des abscisses.
Le graphique ci-dessous illustre la situation de la partie B.



1. Démontrer que le point P a pour coordonnées $\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}\ ;\ 0\right)$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Existe-t-il une fonction g vérifiant $g(0) = 2$ et $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{i}$?

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.
Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.
   - **a.** Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.
   - **b.** Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.
2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.

   Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.
3. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

   On rappelle que, pour tout nombre réel k positif : $P(X \leqslant k) = \displaystyle\int_0^k \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$
   - **a.** Montrer que $P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{-1000\lambda}$.
   - **b.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

     La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1 000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\dfrac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à 10^{-4} du paramètre λ.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.
   - **a.** Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2 009 par 11.
   - **b.** Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.
   - **c.** Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.
2. On désigne par p un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n le nombre $A_n = 2^n + p$.

   On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}.
   - **a.** Montrer que d_n divise 2^n.
   - **b.** Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier.
   - **c.** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

     Déterminer la parité de d_n en fonction de celle de p.

     En déduire le PGCD de $2^{2009} + 2009$ et $2^{2010} + 2009$.

ANNEXE DE L'EXERCICE 1

(à rendre avec la copie)