Corrigé du baccalauréat S Métropole & La Réunion septembre 2009

EXERCICE 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. Quel que soit le réel x, $x^2 \geqslant 0 \Rightarrow x^2+4 \geqslant 4 \Rightarrow \ln\left(x^2+4\right)$ existe.
   La fonction f est la composée de la fonction $x \longmapsto x^2+4$, dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]4\ ;\ +\infty[$ et de la fonction $x \longmapsto \ln x$ qui est dérivable sur $]4\ ;\ +\infty[$. La fonction f est donc dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   Comme $(\ln \circ u(x))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = x^2+4$ on obtient $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$ quel que soit $x \in [0\ ;\ +\infty[$.
   Le numérateur et le dénominateur étant positifs, le quotient est positif, donc la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. La dérivée n'étant nulle qu'en 0, on peut affirmer que la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** La fonction g est dérivable et $g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{2x}{x^2+4} - 1 = \dfrac{-x^2+2x-4}{x^2+4}$.
   Le signe de $g'(x)$ est donc celui du trinôme $-x^2+2x-4$.
   Son discriminant $\Delta = 4-16 = -12$ donc $g'(x)$ est du signe du coefficient de x^2 donc négatif pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$.
   La fonction g est donc décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b.
   - la fonction g est continue, car dérivable sur $[2\ ;\ 3]$;
   - g est décroissante sur $[2\ ;\ 3]$;
   - $g(2) = \ln 8 - 2 \approx 0,07 > 0$ et $g(3) = \ln 13 - 3 \approx -0,4 < 0$;

   Il existe donc un réel unique $\alpha \in [2\ ;\ 3]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   On trouve de même que $g(2,1) \approx 0,03$ et $g(2,2) \approx -0,03$. Donc $2,1 < \alpha < 2,2$.
   Enfin $g(2,15) \approx 0,004$ et $g(2,16) \approx -0,006$.
   Conclusion $\alpha \approx 2,2$ à 0,1 près.

   c. On a $g(x) = 0 \iff f(x) - x = 0 \iff f(x) = x$. Les deux équations sont équivalentes donc ont les mêmes solutions, en l'occurrence il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

PARTIE B

1. En résumé : verticalement vers $\mathscr{C}$, horizontalement vers Δ. Cf. la figure à la fin.
2. Cf. la figure à la fin.
3. **a.** Démonstration par récurrence :
   — *Initialisation* : on a bien $1 \leqslant u_0 \leqslant \alpha$ puisque $u_0 = 1$; la relation est vraie au rang 0.
   — *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que : $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   Par croissance de la fonction f, on a :
   $f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(\alpha) \iff \ln 5 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. Comme $1 < \ln 5$, on a bien :
   $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$
   La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n au moins égal à 1, elle est vraie au rang $n+1$, elle est donc vraie pour tout naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

b. On démontre facilement ($u_0 \leqslant u_1$, puis $u_n \leqslant u_{n+1} \Rightarrow u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$) que la suite (u_n) est croissante. Comme elle est majorée par α d'après la question précédente, elle converge vers $\ell \leqslant \alpha$.

c. Or la fonction f est continue donc en particulier en ℓ, on a $f(u_n) = u_{n+1} \Rightarrow f(\ell) = \ell$ (par limite en plus l'infini). On sait que la seule solution de cette équation est α.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

EXERCICE 2 : (5 points)

Commun à tous les candidats

1. $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$;
$\mathscr{P}'$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n'}(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$: ces vecteurs n'étant pas colinéaires, les plans ne sont pas parallèles; leur intersection est donc une droite $\mathscr{D}$ dont tous les points de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-1 &=& 0\\ y+z-2 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-y\\ z &=& 2-y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-y\\ z &=& 2-y\\ y &=& t\end{array}\right. (t\in\mathbb{R}) \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t\\ z &=& 2-t\\ y &=& t\end{array}\right. (t\in\mathbb{R})$$

qui est une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.

2. **a.** La droite $\mathscr{D}$ contient le point $(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-1\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et ce vecteur est normal au plan $\mathscr{R}$.
Une équation de ce plan est donc : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{R} \iff -x+y-z=0 \iff x-y+z=0$.

b. $\mathscr{R}$ et $\mathscr{D}$ étant perpendiculaires sont sécants en un point dont les coordonnées vérifient les équations de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{R}$ soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t\\ z &=& 2-t\\ y &=& t\\ x-y+z &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t\\ z &=& 2-t\\ y &=& t\\ 1-t-t+2-t &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-t\\ z &=& 2-t\\ y &=& t\\ 1 &=& t\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 1\\ z &=& 1\\ 1 &=& t\end{array}\right. \text{Conclusion : I}(0 ; 1 ; 1)$$

3. **a.** $\text{A} \in \mathscr{R} \iff -\dfrac{1}{2} - 0 + -\dfrac{1}{2} = 0$ qui est vrai;
$\text{B} \in \mathscr{R} \iff 1-1+0=0$ qui est vrai.

b. I étant le milieu de [AA′] et [BB′], le quadrilatère ABA′ B′ est un est un parallélogramme.
D'autre part : $\overrightarrow{\text{IA}}\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ -1\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{\text{IB}}(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$.
Donc $\overrightarrow{\text{IA}} \cdot \overrightarrow{\text{IB}} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$.
Le parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires : c'est un losange

c. Le point S correspond bien au point de $\mathscr{D}$ de paramètre -1

d. A, B, I, A′ et B′ sont des points de $\mathscr{R}$ et I et S appartiennent à la droite $\mathscr{D}$, donc la droite (IS) est la hauteur issue de S de la pyramide L'aire du losange est égale au quadruple de l'aire du triangle rectangle IAB. On a $\text{IA} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{6}{4}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; $\text{IB} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.
Donc aire (ABA′′B′) $= 4 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{12}$.
La hauteur : $\overrightarrow{\text{IS}}(2\ ;\ -2\ ;\ 2)$, d'où $\text{IS} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$.
Finalement $V = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{12} \times \sqrt{12} = \dfrac{1}{3} \times 12 = 4$.

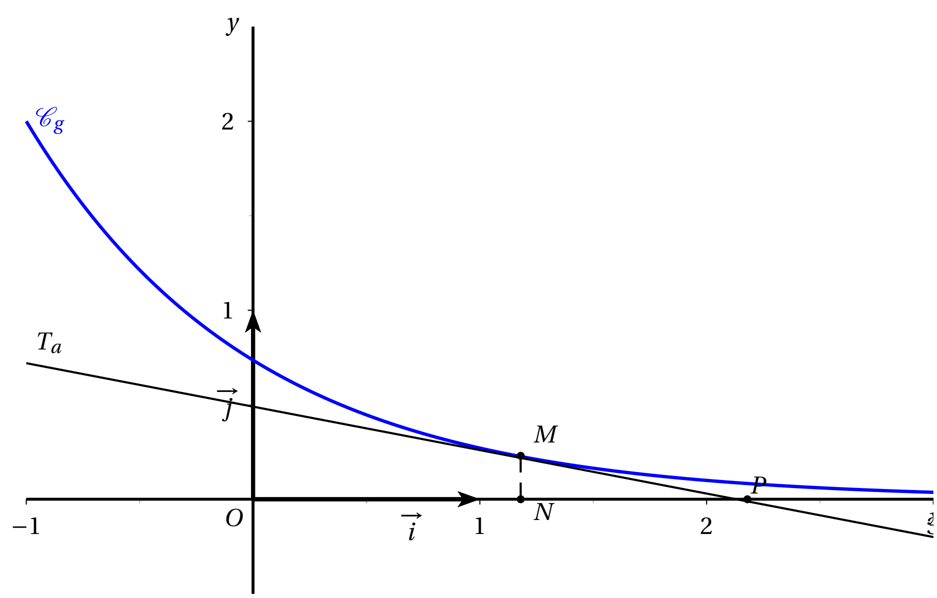
EXERCICE 3 : (4 points)

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \text{e}^x$.
   L'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y - f(a) = f'(a)(x-a) \iff y - \text{e}^a = \text{e}^a(x-a)$.
   Elle coupe l'axe des abscisses au point d'ordonnée 0; donc $0-\text{e}^a = \text{e}^a(x-a) \iff -1 = x-a \iff x = a-1$ (car $\text{e}^a \neq 0$. On a donc $P(a-1\,;\,0)$.
2. On a $M\left(a\,;\,\text{e}^a\right)$ et $N(a\,;\,0)$.
   D'ou $\overrightarrow{NP}(-1\,;\,0)$ ce qui signifie que $\overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{\imath}$.

PARTIE B

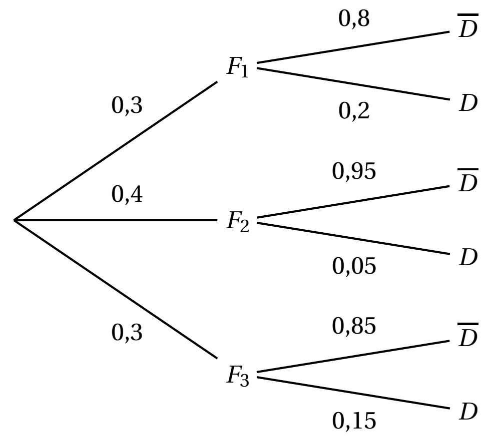


1. L'équation de la tangente est : $y - g(a) = g'(a)(x-a)$. Le point P d'ordonnée nulle est tel que $0 - g(a) = g'(a)(x-a) \iff x - a = -\dfrac{g(a)}{g'(a)} \iff x = a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}$. (car $g'(a) \neq 0$)
2. On a $P\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}\,;\,0\right)$ et $N(a\,;\,0)$, d'où $\overrightarrow{NP}\left(-\dfrac{g(a)}{g'(a)}\,;\,0\right)$.
   Donc $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{\imath} \iff -\dfrac{g(a)}{g'(a)} = 1 \iff -g(a) = g'(a)$.
   La fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = -y$; on sait que les solutions de cette équation sont de la forme $y = C\text{e}^{-x}$. Avec la condition initiale $y(0) = 2$, on obtient $2 = C\text{e}^{-0} \iff C = 2$.
   Conclusion : il existe bien une seule fonction vérifiant les deux conditions données, c'est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\text{e}^{-x}$.

EXERCICE 4 : (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** F_1 désigne l'évènement : « le pneu provient du fournisseur 1 ».
D désigne l'évènement : « le pneu présente un défaut ».
On a l'arbre suivant :



D'après le théorème des probabilités totales :
$p\left(\overline{D}\right) = p\left(F_1 \cap \overline{D}\right) + p\left(F_2 \cap \overline{D}\right) + p\left(F_3 \cap \overline{D}\right)$ soit
$p\left(\overline{D}\right) = 0,3 \times 0,8 + 0,4 \times 0,95 + 0,3 \times 0,85 = 0,24 + 0,38 + 0,255 = 0,875$. On a

$$p_{\overline{D}}(F_2) = \dfrac{p\left(\overline{D} \cap F_2\right)}{p\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0,4 \times 0,95}{0,875} = \dfrac{0,38}{0,875} \approx 0,434.$$

2. La variable aléatoire donnant le nombre de pneus ayant un défaut suit une loi binomiale de probabilité $1 - 0,875 = 0,125$ avec $n = 10$.
La probabilité cherchée est donc égale à :
$p(D \leqslant 1) = p(D = 0) + p(D = 1) = 0,125^0 \times 0,875^{10} + \dbinom{10}{1} \times 0,125^1 \times 0,875^9 =$
$0,875^{10} + 10 \times 0,125 \times 0,875^9 \approx 0,6388 \approx 0,639$ au millième près

3. **a.** On a $p(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \displaystyle\int_0^{1000} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{500} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_{500}^{1000} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{500}^{1000} =$
$-\mathrm{e}^{-1000\lambda} - \left(\mathrm{e}^{-500\lambda}\right) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{-1000\lambda}$.

b. On a donc $p(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \dfrac{1}{4} \iff \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{-1000\lambda} = \dfrac{1}{4} \iff \mathrm{e}^{-500\lambda} - \left(\mathrm{e}^{-500\lambda}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = 0.$
En posant $x = \mathrm{e}^{-500\lambda}$, l'équation à résoudre s'écrit $x - x^2 - \dfrac{1}{4} = 0 \iff x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0 \iff$
$\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \iff x - \dfrac{1}{2} = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$. Il reste à résoudre :
$\mathrm{e}^{-500\lambda} = \dfrac{1}{2}$ soit d'après la croissance de la fonction ln, $-500\lambda = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) \iff$
$-500\lambda = -\ln 2 \iff \lambda = \dfrac{\ln 2}{500} \approx 0,001\,38 \approx 0,001\,4$.

EXERCICE 4 : (5 points)

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $2\,009 = 11 \times 182 + 7$. Le reste est donc égal à 7.

b. On a $2^5 = 32 = 11 \times 2 + 10$, donc $2^5 \equiv 10 \pmod{11}$, ou $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ donc $\left(2^5\right)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{11} \iff 2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

Le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11 est égal à 1.

c. On a $2^{2009} = 2^{10\times 200+9} = 2^{10\times 100} \times 2^9 = \left(2^{10}\right)^{100} \times 2^9$.

Or $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, donc $\left(2^{10}\right)^{100} \equiv 1^{100} \pmod{11}$;

D'autre part $2^9 = 2^5 \times 2^4$. On a vu que $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ et $2^4 = 16 \equiv 5 \pmod{11}$, donc par produit $2^9 = 2^5 \times 2^4 \equiv -5 \pmod{11}$.

Finalement $2^{2009} \equiv 1 \times (-5) \pmod{11}$ ou $2^{2009} \equiv -5 \pmod{11}$ et comme $2009 \equiv 7 \pmod{11}$, par somme on obtient finalement :

$2^{2009} + 2009 \equiv -5 + 7 \pmod{11}$ ou encore $2^{2009} + 2009 \equiv 2 \pmod{11}$.

Le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11 est égal à 2.

2. **a.** $A_{n+1} = 2^{n+1} + p$.

Tout diviseur de A_n et A_{n+1} divise leur différence $2^{n+1} + p - \left(2^n + p\right) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$.

En particulier d_n divise 2^n.

b. n étant supérieur à zéro, 2^n est pair, donc $A_n = 2^n + p$ a la même parité que p.

c. D'après la question précédente A_n et A_{n+1} ont la parité de p. Donc

si p est pair A_n et A_{n+1} et par conséquent leur P. G. C. D. le sont aussi ;

si p est impair A_n et A_{n+1} et par conséquent leur P. G. C. D. le sont aussi ; D'après le résultat précédent A_{2009} et A_{2010} sont impairs car 2009 l'est et leur P. G. C. D. l'est aussi.

Or on a vu que ce P. G. C. D., d_n divisait 2^n. Or tous les diviseurs de 2^n sont pairs sauf 1 seul diviseur impair.

Conclusion : le P. G. C. D. de $2^{2009} + 2009$ et $2^{2010} + 2009$ est égal à 1 : ils sont premiers entre eux.

ANNEXE DE L'EXERCICE 1
(à rendre avec la copie)