∽ Corrigé du baccalauréat S Métropole Juin 2010 ∾

EXERCICE 1

Bernard Froget & Sébastien Sigrist

Partie A :

1. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, chacune dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $u'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$, on en déduit : $u'(x) + u(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$:

   ***u* est donc est une solution de l'équation différentielle (E)**

2. On sait d'après le cours que les solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions h_K définies sur $\mathbb{R}$ par $h_K(x) = K\mathrm{e}^{-ax}$, avec $K \in \mathbb{R}$. On en déduit :

   Les solutions de l'équation (E') sont les fonctions h_K définies sur $\mathbb{R}$ par $h_K(x) = K\mathrm{e}^{-x}$, où $K \in \mathbb{R}$

3. v est une solution de l'équation différentielle (E)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) + v(x) = \mathrm{e}{-}x\\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x)\ ^*\\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) - u'(x) + v(x) - v'(x) = 0\\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (v-u)'(x) + (v-u)(x) = 0\\
&\Longleftrightarrow \quad v-u \text{ est une solution de l'équation différentielle (E')}
\end{aligned}$$

   * car u est une solution de l'équation $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$

4. Raisonnons encore par équivalence :

v est une solution de l'équation différentielle (E)	$\Leftrightarrow$	$v - u$ est une solution de l'équation différentielle (E')	d'après Q.3.
	$\Leftrightarrow$	Il existe un réel K tel que, pour tout réel x : $(v-u)(x) = K\mathrm{e}^{-x}$	d'après Q.2.
	$\Leftrightarrow$	Il existe un réel K tel que, pour tout réel x : $v(x) = K\mathrm{e}^{-x} + u(x)$	

   Par suite :

   Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions v_K définies sur $\mathbb{R}$ par

   $v_K(x) = K\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = (x+K)\mathrm{e}^{-x}$, où $K \in \mathbb{R}$

5. Soit g une solution de (E) : d'après Q.4, il existe un réel K tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = (K+x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Comme : $g(0) = 2 \Leftrightarrow K\mathrm{e}^{0} = 2 \Leftrightarrow K = 2$, on en déduit :

L'unique solution g de l'équation (E) vérifiant $g(0) = 2$ est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B :

1. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par exemple en tant que solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation (E)).
   On a alors : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k'(x) = \mathrm{e}^{-x} - f_k(x) = \mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}(x+k) = \mathrm{e}^{-x}(1-x-k)$.
   Puisque $\mathrm{e}^{X} > 0$ pour tout réel X, le signe de $f_k'(x)$ est celui de $1-x-k$.
   Comme $1-x-k \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1-k$, f_k est croissante sur $]-\infty\,;\,1-k]$ et décroissante sur $[1-k\,;\,+\infty[$:

   La fonction f_k admet donc un maximum pour $x = 1-k$.

2. M_k a pour coordonnées $(1-k, f_k(1-k))$, soit $(1-k, \mathrm{e}^{-(1-k)})$. Puisque $y_{M_k} = \mathrm{e}^{-x_{M_k}}$, on a prouvé :

   Le point de la courbe $\mathscr{C}_k$ d'abscisse $1-k$ appartient à la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{e}^{-x}$.

3. **a.** La fonction $H : x \mapsto \text{e}^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, ce qui permet d'identifier immédiatement les deux courbes.

   b. • $H(0) = 1$: **L'unité sur l'axe des ordonnées est égale à 2 cm, soit la distance entre deux graduations successives.**

   • $f_k(0) = k$: comme le point de $\mathscr{C}_k$ d'abscisse 0 a pour ordonnée 2, on en déduit : $\boldsymbol{k = 2}$

   • La résolution de l'équation $f_k(x) = 0$ montre que la courbe $\mathscr{C}_k$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse
   $-k = -2 \iff k = 2$:

L'unité sur l'axe des abscisses est aussi égale à 2 cm, soit la distance entre deux graduations successives.

4. • $\displaystyle\int_0^2 (x+2)\text{e}^{-x}\,\text{d}x$ est de la forme $\displaystyle\int_0^2 u'(x)v(x)\,\text{d}x$, où u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\left\{\begin{array}{l} u(x) = -\text{e}^{-x} \\ \text{et} \\ v(x) = x+2 \end{array}\right.$.

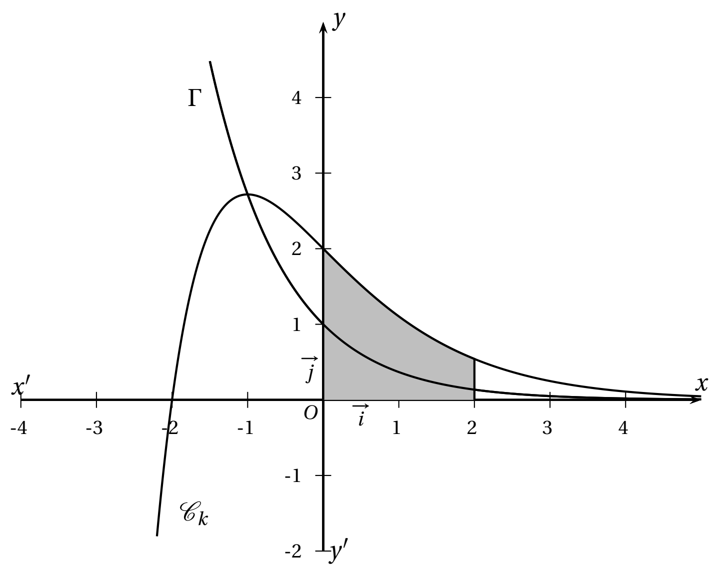
   Les théorèmes généraux permettent d'affirmer que les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que leurs dérivées sont continues sur $\mathbb{R}$: le théorème d'intégration par parties peut alors être appliqué :

$$\begin{array}{rcl c l}
\displaystyle\int_0^2 (x+2)\text{e}^{-x}\,\text{d}x & = & \displaystyle\int_0^2 u'(x)\times v(x)\,\text{d}x & = & [u(x)\times v(x)]_0^2 - \displaystyle\int_0^2 u(x)\times v'(x)\,\text{d}x \\
& = & [-(x+2)\text{e}^{-x}]_0^2 - \displaystyle\int_0^2 -\text{e}^{-x}\,\text{d}x & = & (-4\text{e}^{-2}) + (2) - [\text{e}^{-x}]_0^2 \\
& = & (-4\text{e}^{-2}) + (2) - (\text{e}^{-2}) + 1 & = & 3 - 5\text{e}^{-2}
\end{array}$$

$$\boldsymbol{\int_0^2 (x+2)\text{e}^{-x}\,\text{d}x = 3 - 5\text{e}^{-2}}$$

   • La fonction f_2 est continue et positive sur $[0, 2]$. Par suite :

   $\boldsymbol{\displaystyle\int_0^2 f_2(x)\,\text{d}x}$ **mesure, en unités d'aire, l'aire de la surface limitée par $\mathscr{C}_2$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.**



EXERCICE 2

J. P. Goualard

1. ROC

Soit (u_n) et (v_v) deux suites adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) la décroissante.
Montrons que ces deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

- v_n est décroissante, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant v_0$.
- D'après la propriété 1, pour tout n, $v_n \geqslant u_n$; par conséquent, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.
- La suite (u_n) est donc croissante et majorée par v_0 donc convergente vers un réel ℓ. (propriété 2)
- De même, $v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$ donc (v_n) est décroissante minorée, donc convergente vers un réel ℓ'.
- D'après la définition, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$; or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \ell' - \ell$.

  Par **unicité de la limite**, on a : $\ell' - \ell = 0$ donc $\ell = \ell'$.

  Conclusion : les deux suites convergent, vers le même réel.

2. a. $10^{-n} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^n$ est une suite géométrique de raison comprise strictement entre -1 et 1 et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 1 + \dfrac{1}{10^{n+1}} - \left(1 + \dfrac{1}{10^n}\right) = \dfrac{1}{10^{n+1}} - \dfrac{1}{10^n} < 0$ donc (v_n) est décroissante.

De même, (u_n) est croissante. .

De plus : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - 10^{-n}\right) - \left(1 + 10^{-n}\right) = \lim_{n\to+\infty} -2 \times 10^{-n} = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) **sont adjacentes**.

b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Elles ne sont donc **pas adjacentes** (sinon, la limite commune serait réelle)

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{n}\right) = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 1$.

La suite (v_n) n'est pas monotone car $v_1 = 0$, $v_2 = \dfrac{3}{2} > 1$ et $v_3 = \dfrac{2}{3} < 1$ donc elles **ne sont pas adjacentes**.

3. La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est décroissante, donc $\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ est croissante, donc $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ est croissante.

La suite $\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$ est décroissante, donc $\ln\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$ est décroissante (car ln est une fonction croissante).

Pour que les suites $((u_n)$ et (v_n) soient adjacentes, il faut que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ c'est-à-dire

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(a + \dfrac{1}{n}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\right) = 0$

$\Leftrightarrow \ln a - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln a = 1$

$\Leftrightarrow a = \mathrm{e}$ Les deux suites sont adjacentes pour $\boxed{a = \mathrm{e}}$

EXERCICE 3

François Krieg

Bien que ce ne soit pas demandé dans le sujet, les démonstrations sont données ici.

1. Trois boules sont tirées simultanément, il y a donc $\dbinom{10}{3}$ tirages possibles. Il y a $\dbinom{7}{2}$ façons de choisir 2 boules blanches parmi les 7 présentes dans l'urne et $\dbinom{3}{1}$ façons de choisir une boule noire parmi les trois présentes, donc $\dbinom{7}{2} \times \dbinom{3}{1}$ tirages réalisant l'évènement.

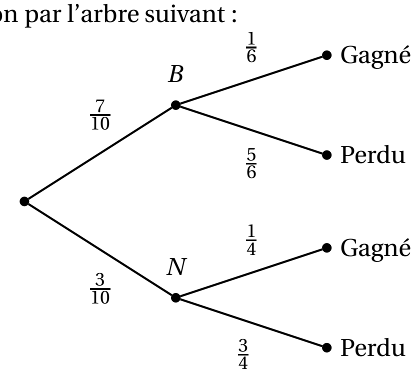
Puisque les boules sont indiscernables au toucher, on est dans une situation d'équiprobabilité, et donc la probabilité de l'évènement est : $\dfrac{\dbinom{7}{2}\times\dbinom{3}{1}}{\dbinom{10}{3}} = \dfrac{\dfrac{7!}{2!\times 5!}\times\dfrac{3!}{1!\times 2!}}{\dfrac{10!}{3!\times 7!}} = \dfrac{\dfrac{7\times 6}{2}\times 3}{\dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2}} = \dfrac{21}{40}$.

La réponse est $\dfrac{21}{40}$.

2. La situation est celle d'un schéma de Bernoulli (on peut associer le blanc au succès et le noir à l'échec), de paramètres 5 (on fait 5 tirages successifs) et $\dfrac{7}{10}$ (probabilité du succès, puisque 7 boules parmi les 10 sont blanches) et donc on cherche à calculer $p(X = 2)$, pour avoir deux succès sur 5 tirages, c'est-à-dire deux boules blanches et trois noires.

Le cours donne une réponse $\dbinom{5}{2}\times\left(\dfrac{7}{10}\right)^2\times\left(1-\dfrac{7}{10}\right)^{5-2} = \dbinom{5}{2}\times\left(\dfrac{7}{10}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{10}\right)^3$.

3. On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



On a donc $p(\text{Gagné}) = \dfrac{7}{10}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{10}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{14}{120}+\dfrac{9}{120} = \dfrac{23}{120}$.

De plus $p(\text{Gagné}\cap \text{B}) = \dfrac{7}{10}\times\dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{60}$

Donc $p_{\text{Gagné}}(\text{B}) = \dfrac{\dfrac{7}{60}}{\dfrac{23}{120}} = \dfrac{14}{23}$.

4. On applique le cours : $p(1 \leqslant X \leqslant 3) = \displaystyle\int_1^3 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,dx = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_1^3 = -\mathrm{e}^{-3\lambda}+\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}-\mathrm{e}^{-3\lambda}$.

EXERCICE 4

Michel Fréchet

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O passant par A.

$\alpha = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $\overline{\alpha}$ son conjugué.

1. a. $\alpha^2 - 4\alpha = 2\overline{\alpha} - 8$:

$$\alpha^2 - 4\alpha = \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 - 4\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}-4\right) = \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(-3+\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = -6-2\mathrm{i}\sqrt{3}$$

$$2\overline{\alpha} - 8 = 2\overline{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)} - 8 = 2-2\mathrm{i}\sqrt{3}-8 = -6-2\mathrm{i}\sqrt{3}$$

b. Le cercle $\mathscr{C}$ a pour rayon $OA = 2$ et

$$OB^2 = OC^2 = \alpha\overline{\alpha} = \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right) = 4 = 2^2 \Longrightarrow B \in \mathscr{C} \text{ et } C \in \mathscr{C}$$

2. Soit D un point du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$.

a. Voir figure plus loin.

b. L'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ est : $z' - 0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z-0)$.

Ainsi :

$$z_E = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

3. F milieu de $[BD]$; G milieu de $[CE]$:

a. $z_F = \dfrac{z_B + z_D}{2} = \dfrac{\alpha + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2} = \dfrac{\alpha}{2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; $z_G = \dfrac{\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \overline{\alpha}}{2}$

b. AFG équilatéral :

$$\begin{aligned}\frac{z_G - 2}{z_F - 2} &= \frac{\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \overline{\alpha} - 4}{\alpha + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 4} = \frac{\alpha\left(\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \overline{\alpha} - 4\right)}{2\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \alpha^2 - 4\alpha}\\ &= \frac{\alpha\left(\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \overline{\alpha} - 4\right)}{2\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 2\overline{\alpha} - 8} = \frac{\alpha\left(\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \overline{\alpha} - 4\right)}{2\left(\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \overline{\alpha} - 4\right)} = \frac{\alpha}{2}\\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left|\frac{z_G - 2}{z_F - 2}\right| = \frac{AG}{AF} = 1 \iff AG = AF \text{ et } \mathrm{Arg}\left(\frac{z_G - 2}{z_F - 2}\right) = \left(\overrightarrow{AF}\,;\overrightarrow{AG}\right) = \frac{\pi}{3}$$

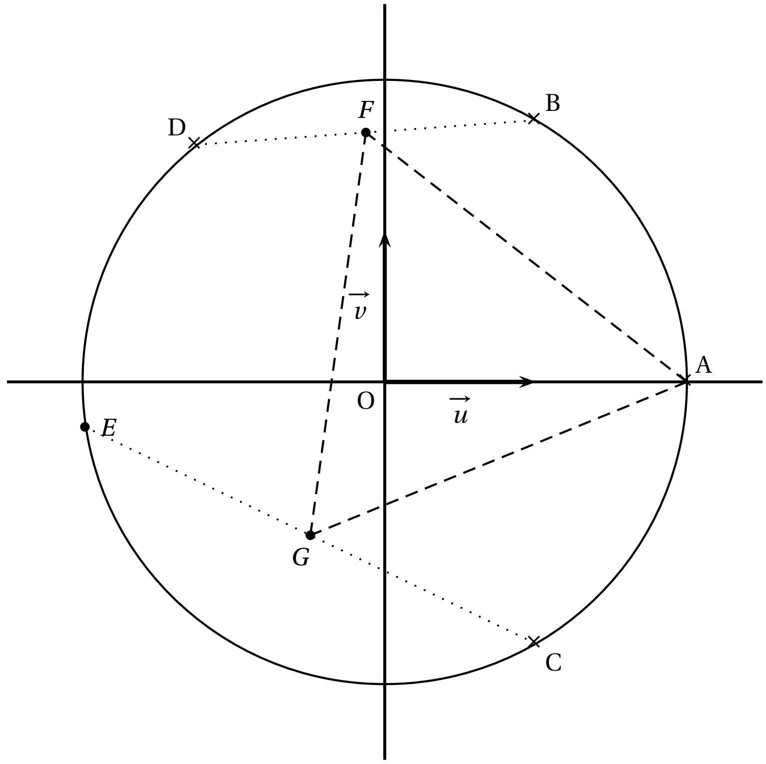
Nous sommes donc en présence d'un triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure $\dfrac{\pi}{3}$. C'est un triangle équilatéral.

4. $AF^2 = 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$. $f :\ x \to 4 - 3\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$.

Tableau de variations de f :

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$		π
f	7	$\searrow$	$4 - 2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$4 + 2\sqrt{3}$	$\searrow$	7

Le minimum de cette fonction f est atteint pour $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$. En effet, le point D dépend de $\theta \in]-\pi\,;\,\pi]$. La fonction f admet un minimum sur cet intervalle. Donc AF^2 admet un minimum en $-\dfrac{\pi}{6}$. Du fait que AF est positif, AF est aussi minimum en $-\dfrac{\pi}{6}$.



EXERCICE 4 Bernard Froget

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a $z_{T(A)} = -\overline{z_A} + 2 = -1 + 2 = 1 = z_A$: $\boldsymbol{T(A) = A}$
   On a $z_{T(\Omega)} = -\overline{z_\Omega} + 2 = -(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) + 2 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = z_\Omega$: $\boldsymbol{T(\Omega) = \Omega}$

   b. T est une similitude distincte de l'identité et ayant (au moins) deux points fixes : **T est donc la réflexion d'axe $(A\Omega)$**

   c. L'image d'un cercle de centre O et de rayon R par une similitude s est un cercle de centre $s(O)$ et de rayon $k \times R$, où k est le rapport de la similitude. Une réflexion étant une isométrie, on a ici $k = 1$. Comme $T(O)$ a pour affixe 2, alors :

   L'image de $\mathscr{C}$ par T est le cercle de centre $T(O) = O'$ et de rayon 1.

2. **a.** Voir ci-dessous : A' est le point de $\mathscr{C}'$ d'abscisse 2.5

   b. On a $\left\{\begin{array}{l} Arg\left(\dfrac{z'-2}{z}\right) = Arg\left(\dfrac{z_{M'} - z_{O'}}{z_M - z_O}\right) = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}\right) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ \text{et} \\ \left|\dfrac{z'-2}{z}\right| = \dfrac{|z'-2|}{|z|} = \dfrac{O'M'}{OM} = 1 \text{ car } OM = O'M' = 1 \end{array}\right.$, d'où : $\dfrac{z'-2}{z} = 1 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, soit :

   $\boldsymbol{z' - 2 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}} z}$

   c. L'écriture complexe de r est de la forme $z' = az + b$, avec $\left\{\begin{array}{l} |a| = 1 \\ \text{et} \\ a \neq 1 \end{array}\right.$: r est donc une rotation d'angle $Arg\,(a) = \frac{\pi}{3}$.

Le centre de r est l'unique point invariant de r (car $r \neq Id_{\mathscr{P}}$) : son affixe est donc la solution de l'équation $z = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$, soit $z = \dfrac{2}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{2}{\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})}{1} = z_{\Omega}$: ***r* est la rotation de centre Ω et d'angle $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$**

3. L'affixe z_1 du point M_1 est $\dfrac{z + z'}{2} = \dfrac{z + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}z + 2}{2} = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2}z + 1 = \left(\frac{3}{4} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}z + 1$.
On reconnait l'écriture complexe d'une similitude directe S : le lieu géométrique du point M_1 lorsque le point M décrit le cercle $\mathscr{C}$ est l'image de $\mathscr{C}$ par S : il s'agit donc du cercle de centre $S(O) = A$ (car A est le milieu de $[OO']$) et passant par le milieu A_1 de $[AA']$.