∽ Corrigé du baccalauréat S Métropole juin 2008 ∾

Exercice 1

1. (a) Soit F la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$. F est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables.
Pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $F'(x) = 1\times\ln x + x\times\ln x - 1 = \ln x = f(x)$; par conséquent $F' = f$ donc F est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On en déduit que : $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\mathrm{e}) - F(1) = (\mathrm{e}\ln\mathrm{e} - \mathrm{e}) - (1\ln 1 - 1) = 0 - (-1) = 1.$ $\boxed{I = 1}$.

   (b) $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\,\mathrm{d}x$.
En posant $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$, on a $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.
u, v, u' et v' sont continues, donc on peut effectuer une intégration par parties.
On a : $u'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x}$ et $v(x) = x$
$J = [u(x)v(x)]_{1^{\mathrm{e}}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \left[x(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 2\frac{\ln x}{x}\times x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2I$; $\boxed{J = I - 2I}$.

   (c) Puisque $I = 1$, on obtient : $\boxed{J = \mathrm{e} - 2}$.
Remarque : on pouvait trouver J directement, en effectuant un autre choix de fonctions pour une intégration par parties : $J = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\times\ln x\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)F'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)F(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} f'(x)F(x)\,\mathrm{d}x =$
$f(\mathrm{e})F(\mathrm{e}) - f(1)F(1) - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x - 1)\,\mathrm{d}x = -\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x - 1)\,\mathrm{d}x = -\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x = -I + (\mathrm{e} - 1) = \mathrm{e} - 2$

   (d) Pour tout x de $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$ donc $0 \leqslant (|nx)^2 \leqslant \ln x$ donc $g(x) \leqslant f(x)$.
Par conséquent : $A = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x = I - J = 3 - \mathrm{e}.$
$\boxed{A = 3 - \mathrm{e}}$.

2. On a : $MN = \ln x - (\ln x)^2$. Posons $h(x) = \ln x - (\ln x)^2$.
h est dérivable : pour tout x de $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, $h'(x) = \dfrac{1}{x} - 2\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x}$.
$h'(x) = 0 \iff \ln x = \dfrac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$.
Puisque x est positif, $h'(x)$ est du signe de $1 - 2\ln x$.
$1 - 2\ln x > 0 \iff \ln x < \dfrac{1}{2} \iff x < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \iff x < \sqrt{\mathrm{e}}$.
On en déduit le tableau de variations de h :

x	1		$\sqrt{\mathrm{e}}$		e
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		↗	$h(\sqrt{\mathrm{e}})$	↘	

Par conséquent, $h(x)$ a un maximum pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$.
$h(\sqrt{\mathrm{e}})\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) - (\ln(\sqrt{\mathrm{e}}))^2 = \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.
MN est maximum pour $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ et vaut alors $\dfrac{1}{4}$.

Exercice 2

1. (a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$.
Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires (les coordonnées ne sont pas proportionnelles) donc les points A, B et C ne sont pas alignés

(b) Puisque A, B et C ne sont pas alignés, ils définissent un plan, dont une équation cartésienne est de la forme $ax+by+cz+d=0$.

Les coordonnées des trois points vérifient cette équation, donc on obtient un système de trois équations :

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+d=0 \\ a+2b+c+d=0 \\ 3a-b+2c+d=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} d=-a-b \\ a+2b+b-a-b=0 \\ 3a-b+2c-a-b=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} d=-a-b \\ b+c=0 \\ 2a-2b+2c=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} d=-a-b \\ b+c=0 \\ a-b+c=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} d=-a-b \\ c=-b \\ a-2b=0 \end{array}\right. .$$

On choisit par exemple $b=1$. On obtient alors $a=2$, $c=-1$ et $d=-3$.

Une équation cartésienne de (ABC) est : $\boxed{2x+y-z-3=0}$.

2. Soient (P) et (Q) les plans d'équations respectives $x+2y-z-4=0$ et $2x+3y-2z-5=0$.

Ces deux plans ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles), donc les deux plans (P) et (Q) ne sont pas parallèles.

Ils sont alors sécants selon une droite $\mathscr{D}$.

Un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, ses coordonnées vérifient les équations des deux plans, donc sont solutions du système formé par ces deux équations.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=4=0 \\ 2x+3y-2z-5=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+2y=z+4 \\ 2x+3y=2z+5=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z=t \\ x+2y=t+4 \\ 2x+3y=2t+5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z=t \\ 2x+4y=2t+8 \\ 2x+3y=2t+5 \end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{l} z=t \\ 2x+4y=2t+8 \\ y=3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z=t \\ y=3 \\ x=-2+t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}).$$

Une équation paramétrique de $\mathscr{D}$ est donc : $\left\{\begin{array}{l} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

3. Cherchons l'intersection des trois plans ? Soit $\Omega(x\ ;\ y\ ;\ z)$. Ω appartient aux trois plans si, et seulement si, Ω appartient à $\mathscr{D}$ et au plan (ABC).

Ω appartient à $\mathscr{D}$ si, et seulement si, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $x=-2+t$, $y=3$ et $z=t$.

Ω appartient aussi à (ABC) signifie que ses coordonnées vérifient l'équation de (ABC) : on doit donc avoir : $2(-2+t)+3-t-3=0 \iff t=4$.

On en déduit que Ω a pour coordonnées : $\Omega(2\ ;\ 3\ ;\ 4)$.

L'intersection des trois plans (P), (Q) et (ABC) est : $\boxed{\Omega(2\ ;\ 3\ ;\ 4)}$.

4. La distance de A à la droite $\mathscr{D}$ est la norme de $\overrightarrow{AM}$ où M est un point de $\mathscr{D}$ et où $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\mathscr{D}$.

Soit $\in \mathscr{D}$. M a pour coordonnées $M(-2+t\ ;\ 3\ ;\ t)$, $t\in\mathbb{R}$.

Alors : $\overrightarrow{\mathrm{A}M}\begin{pmatrix}-3+t\\2\\t\end{pmatrix}$.

Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\mathrm{A}M}\perp\mathscr{D} \iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{\mathrm{A}M}=0 \iff -3+t+t=0 \iff t=\dfrac{3}{2}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{A}M}$ sont alors : $\overrightarrow{\mathrm{A}M}\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2}\\2\\\dfrac{3}{2}\end{pmatrix}$.

La distance AM vaut alors : $\mathrm{A}M=\sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+2^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

La distance de A à $\mathscr{D}$ vaut : $\boxed{d = \sqrt{\dfrac{17}{2}}} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$.

Exercice 3

Pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

1. (a) $R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda t} + 1\right) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$. $\boxed{R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}}$.

   (b) Pour tout réel s, $P_{X>t}(X > t+s) = \dfrac{P((X > t) \cap (X > t+s))}{P(X > t)} = \dfrac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \boxed{\mathrm{e}^{-\lambda s}}$ qui ne dépend pas de t. X est bien une loi de durée de vie sans vieillissement.

2. On prend $\lambda = 0{,}000\,26$.

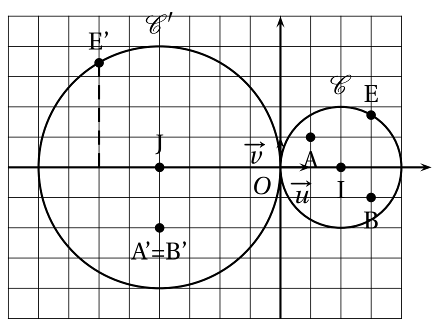
   (a) $P(X \leqslant 1\,000) = 1 - R(1000) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}000\,26 \times 1\,000} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}26}$.
   $P(X > 1\,000) = R(1\,000) = \mathrm{e}^{-0{,}26}$.
   $\boxed{P(X \leqslant 1\,000) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}26}}$ et $\boxed{P(X > 1\,000) = \mathrm{e}^{-0{,}26}}$.

   (b) Puisque l'on a une loi de durée de vie sans vieillissement, la probabilité que l'événement $(X > 2\,000)$ sachant que l'événement $(X > 1\,000)$ est réalisé est $P(X > 1\,000) = \boxed{\mathrm{e}^{-0{,}26} \approx 0{,}77}$.

   (c) Puisque c'est une loi de durée de vie sans vieillissement, la probabilité que l'agenda tombe en panne avant 3 000 heures sachant qu'il a fonctionné plus de 2 000 est $P(x > 1\,000) = \boxed{\mathrm{e}^{-0{,}26} \approx 0{,}77}$

Exercice 4

1. figure



2. À tout $M(z)$, on associe $M'(z')$ tel que $z' = z^2 - 4z$.
   Soit $a = 1 + \mathrm{i}$ l'affixe de A et soit a' celle de A' : $a' = (1+\mathrm{i})^2 - 4(1+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i} - 4(1+\mathrm{i}) = -4 - 2\mathrm{i}$.
   Soit $b = 3 - \mathrm{i}$ affixe de B et soit b' celle de B' : $b' = (3-\mathrm{i})^2 - 4(3-\mathrm{i}) = 8 - 6\mathrm{i} - 4(3-\mathrm{i}) = -4 - 2\mathrm{i}$.
   $\boxed{\text{Les points A}' \text{ et B}' \text{ sont identiques.}}$

3. Les points qui ont pour image le point d'affixe -5 ont pour affixe z, solutions de l'équation $z^2 - 4z = -5$.
   $z^2 - 4z = -5 \iff z^2 - 4z + 5 = 0$.
   $\Delta = -4 < 0$. L'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{4 - 2\mathrm{i}}{2} = 2 - \mathrm{i}$ et $z_2 = 2 + \mathrm{i}$.
   $\boxed{\text{Les deux points ayant pour image le point d'affixe -5 on pour affixe } -2-\mathrm{i} \text{ et } -2+\mathrm{i}.}$

4. (a) Pour tout z, $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = z^2 - 2 \times z \times 2 + 2^2 = (z-2)^2$.

   (b) • Alors, $|z' + 4| = \left|(z-2)^2\right| = |z-2|^2$.
   • Pour tout $z \neq 2$, $\arg(z' + 4) = \arg\left((z-2)^2\right) = 2\arg(z-2)$ modulo 2π.

(c) On suppose que M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2. $z_M = 2+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.
On a alors : $|z'+4| = |z_M - 2|^2 = IM^2 = 2^2 = 4$. Appelons J le point d'affixe -4. On a alors $JM' = 4$
$\arg(z'+4) = 2\arg(z-2) = 2\theta$.
On trouve que $\arg(z'+4) = \arg(z'-z_J)$ décrit $\mathbb{R}$.
$\boxed{\text{Par conséquent, } M' \text{ décrit le cercle de centre J et de rayon 4.}}$

5. Soient $\mathrm{E}\left(2+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)$ et E' l'image de E.

(a) E est un point de $\mathscr{C}$. IE=2 : une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{IE}\right)$ est $\dfrac{\pi}{3}$.

(b) D'après les questions précédentes, E' est un point de $\mathscr{C}'$ donc $\boxed{\text{JE'=4}}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{JE'}\right) = 2\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{IE}\right) = \boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$.

(c) On sait que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ donc J' est le point de $\mathscr{C}'$ d'affixe $-\dfrac{1}{2}$ et d'ordonnée positive (car $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) > 0$)

Exercice 4 (spécialité)

1. Soit (d) la droite d'équation $4x+3y=1$.
Pour trouver tous les points de (d) à coordonnées entières, on résout dans $\mathbb{Z}$ l'équation $4x+3y=1$.
$(1\ ;\ -1)$ est une solution évidente.
$4x+3y=1 \iff 4x+3y = 4\times 1 + 3\times(-1) \iff 4(x-1) = 3(-y-1)$.
4 divise donc $3(-y-1)$. 4 et 3 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, 4 divise $-y-1$ donc $-y-1 = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$. On remplace : $4(x-1) = 3\times 4k \iff x-1 = 3k$. Par conséquent : $x = 1+3k$ et $y = -4k-1$.
$\boxed{\text{Les points de } \mathscr{D} \text{ à coordonnées entières sont les points } M_k(1+3k\ ;\ -4k-1),\ k\in\mathbb{Z}.}$

2. Soit σ la similitude directe de centre A, qui transforme B en $M_{-1}(2\ ;\ 3)$.
Le rapport de la similitude est : $k = \dfrac{\mathrm{A}M_{-1}}{\mathrm{A}B} = \left|\dfrac{z_{M_{-1}} - z_{\mathrm{A}}}{z_B - z_{\mathrm{A}}}\right| = \left|\dfrac{-3+4\mathrm{i}}{6-\frac{9}{2}\mathrm{i}}\right|$.
L'angle de cette similitude est : $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}B}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}M_{-1}}\right) = \arg\left(\dfrac{-3+4\mathrm{i}}{6-\frac{9}{2}\mathrm{i}}\right)$.
Or, $\dfrac{-3+4\mathrm{i}}{6-\frac{9}{2}\mathrm{i}} = \dfrac{-3+4\mathrm{i}}{\frac{6+9\mathrm{i}}{2}} = 2\times\dfrac{-3+4\mathrm{i}}{12+9\mathrm{i}} = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{-3+4\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{\mathrm{i}(4+3\mathrm{i})}{4+3\mathrm{i}} = \dfrac{2}{3}\mathrm{i}$.
Par conséquent : $k = \left|\dfrac{2}{3}\mathrm{i}\right| = \dfrac{2}{3}$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}B}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{A}M_{-1}}\right) = \arg\left(\dfrac{2}{3}\mathrm{i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
$\boxed{\text{Cette similitude est de centre A, de rapport } \dfrac{2}{3} \text{ et d'angle } \dfrac{\pi}{2}.}$

3. Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = \dfrac{2}{3}\mathrm{i}z + \dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{3}\mathrm{i}$. C'est une similitude directe.
Pour $z = z_{\mathrm{A}}$, on obtient : $z'_{\mathrm{A}} = \dfrac{2}{3}\mathrm{i}(1-\mathrm{i}) + \dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{3}\mathrm{i} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}\mathrm{i} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{5}{3}\mathrm{i} = 1 - \mathrm{i} = z_{\mathrm{A}}$.
L'image de A est A donc A est un point fixe : c'est le centre de cette similitude.
Le rapport est $\left|\dfrac{2}{3}\mathrm{i}\right| = \dfrac{2}{3}$; son angle est $\arg\left(\dfrac{2}{3}\mathrm{i}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
$\boxed{\text{Par conséquent, } s \text{ est la similitude étudiée à la question précédente.}}$

4. B_1 est l'image de B et B_{n+1} celle de B_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) On a $\mathrm{AB}_{n+1} = \dfrac{2}{3}\mathrm{AB}_n$.

(b) B_n appartient au disque de centre A et de rayon 10^{-2} lorsque $AB_n < 0,01$.

Or la suite (AB_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$. Par conséquent : $AB_n = AB \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{6^2 + \left(\dfrac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \dfrac{81}{4}} = \sqrt{\dfrac{225}{4}} = \dfrac{15}{2}$.

$AB_n \leqslant 0,01 \iff \dfrac{15}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leqslant 0,01 \iff \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leqslant \dfrac{0,01}{\frac{15}{2}} = \dfrac{0,02}{15} \iff n \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{0,02}{15}\right) \iff n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{0,02}{15}\right)}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)} \approx 16,3$.

$\boxed{\text{B}_n \text{ appartient au disque de centre A et de rayon } 10^{-2} \text{ à partir de } n = 17.}$

(c) L'angle $\left(\overrightarrow{AB_1}\,;\,\overrightarrow{AB_n}\right) = \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AB_n}\right) - \left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AB_1}\right) = n\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = (n-1)\dfrac{\pi}{2}$.

Les points A, B_1 et B_n sont alignés si, et seulement si, $\left(\overrightarrow{AB_1}\,;\,\overrightarrow{AB_n}\right) \iff 0\ [\pi] \iff (n-1)\dfrac{\pi}{2} \iff 0\ [\pi]$: les solutions sont tous les entiers impairs.

L'ensemble des points pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés est $\boxed{\text{l'ensemble des entiers naturels impairs.}}$