Corrigé du baccalauréat S Liban 29 mai 2018

Exercice 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1.

Solution : L'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$

ici, le temps d'attente moyen est donc de $\dfrac{1}{0{,}02} = 50$ secondes

il faut ajouter le temps moyen d'échange de 96 secondes

Finalement le temps moyen d'un appel est de 146 secondes soit 2 minutes et 26 secondes

2. a.

Solution : On cherche $P(X \geqslant 120)$

$P(X \geqslant 120) = 1 - P(X < 120) = 1 - \displaystyle\int_0^{120} 0{,}02\mathrm{e}^{-0{,}02t}\,\mathrm{d}t$

$= 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0{,}02t}\right]_0^{120} = \mathrm{e}^{-2{,}4} \approx 0{,}091$

b.

Solution : On cherche $P(Y \leqslant 90)$

$P(Y \leqslant 90) \approx 0{,}409$

3.

Solution : On cherche à comparer $P(X \leqslant 30)$ et $P_{X \geqslant 60}(X \leqslant 60+30)$

X suit une loi exponentielle qui est une loi de durée de vie sans vieillissement donc on sait que pour tous les réels t et h strictement positifs, on a :

$p_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = p(X \geqslant h)$ donc $\left(1 - p_{X\geqslant t}(X \leqslant t+h)\right) = \left(1 - p(X \leqslant h)\right)$

d'où $p_{X\geqslant t}(X \leqslant t+h) = p(X \leqslant h)$ avec $t = 60$ et $h = 30$ on a alors $P_{X\geqslant 60}(X \leqslant 60 + 30) = P(X \leqslant 30)$

Autrement dit, le fait de raccrocher n'a rien changé à son attente totale.

Exercice 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

1.

Solution : $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $1-\mathrm{i} = \overline{(1+\mathrm{i})} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

2. **a.**

Solution : Posons $Z = (1+\mathrm{i})^n$ alors $\overline{Z} = \overline{(1+\mathrm{i})^n} = \left(\overline{1+\mathrm{i}}\right)^n = (1-\mathrm{i})^n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = Z + \overline{Z} = 2Re(Z)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $Z = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}\right) = \sqrt{2^n}\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right)$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2\sqrt{2^n}\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$

Il faut donc étudier le signe de $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$:

- Si $n = 8k$, $k \in \mathbb{N}$,
  $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(8k\frac{\pi}{4}\right) = \cos 2k\pi = 1.$
  On a donc $S_{8k} = 2\left(\sqrt{2}\right)^{8k}\cos\left(8k\frac{\pi}{4}\right) = 2\times 2^{4k} = 2^{4k+1} = \boxed{2^{4k+1}(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)}$.
- Si $n = 8k+1$, $k \in \mathbb{N}$,
  $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left((8k+1)\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$
  On a donc $S_{8k+1} = 2\left(\sqrt{2}\right)^{8k+1}\cos\left((8k+1)\frac{\pi}{4}\right) = 2\times 2^{4k}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2^{4k+1} = \boxed{2^{4k+1}(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)}$.
- Si $n = 8k+2$, $k \in \mathbb{N}$,
  $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left((8k+2)\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
  $S_{8k+2} = 0$: il n'a pas d'écriture trigonométrique.
- Si $n = 8k+3$, $k \in \mathbb{N}$,
  $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left((8k+3)\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$
  $S_{8k+3} = 2\left(\sqrt{2}\right)^{8k+3}\cos\left((8k+3)\frac{\pi}{4}\right) = 2\times 2^{4k+1}\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2^{4k+2}.$
  $S_{8k+3} = \boxed{2^{4k+2}(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)}$.
- Si $n = 8k+4$, $k \in \mathbb{N}$,
  $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left((8k+4)\frac{\pi}{4}\right) = \cos(2k\pi + \pi) = \cos(\pi) = \cos\pi = -1.$
  $S_{8k+4} = 2\left(\sqrt{2}\right)^{8k+4}\cos\left((8k+4)\frac{\pi}{4}\right) = 2^{4k+3}\times -1.$
  $S_{8k+4} = \boxed{2^{4k+3}(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)}$.
- Si $n = 8k+5$, $k \in \mathbb{N}$,
  $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left((8k+5)\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$
  $S_{8k+5} = 2\left(\sqrt{2}\right)^{8k+5}\cos\left((8k+5)\frac{\pi}{4}\right) = 2\times 2^{4k+2}\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2^{4k+3}.$
  $S_{8k+5} = \boxed{2^{4k+3}(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)}$.
- Si $n = 8k+6$, $k \in \mathbb{N}$,
  $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left((8k+6)\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{6\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$
  $S_{8k+6} = 0$: il n'a pas d'écriture trigonométrique.

- Si $n = 8k+7$, $k \in \mathbb{N}$,
  $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left((8k+7)\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi + \frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
  $S_{8k+7} = 2\left(\sqrt{2}\right)^{8k+7}\cos\left((8k+7)\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times 2^{4k+3} \times \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{4k+4}$.
  $S_{8k+7} = \boxed{2^{4k+4}(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)}$.

b.

Solution :
Affirmation A : Vraie car $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2\mathrm{Re}(Z) \in \mathbb{R}$
Affirmation B : Vraie car pour tout entier naturel k,
$n = 4k+2 \Longrightarrow \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.**

Solution : pour $t = 0$ on a $S_1(0)(140\ ;\ 105\ ;\ -170)$

b.

Solution : On sait que les sous-marins se déplacent à vitesse constante. Le premier sous-marin a parcouru la distance AB avec $A = S_1(0)$ et $B = S_1(1)$ en une minute.

$A(140\ ;\ 105\ ;\ -170)$ et $B(80\ ;\ 15\ ;\ -200)$

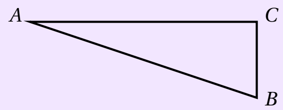
donc $AB = \sqrt{60^2 + 90^2 + 30^2} = \sqrt{12600} = 30\sqrt{14}$

la vitesse du premier sous-marin est donc de $30\sqrt{14}$ mètres par minutes soit $1{,}8\sqrt{14} \approx 6{,}73$ km.h^{-1}

2.

Solution : On considère les points A et B définis précédemment

Soit C le point de l'espace à la verticale de B et ayant la même profondeur que A



alors (ABC) est le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.

Appelons B le point atteint par le sous-marin au bout d'une minute : B(80 ; 15 ; −200).

D'après la définition de la vitesse, celle-ci $30\sqrt{14}$ est égale à la distance AB.

C a la même abscisse et la même ordonnée que B, mais la cote de A : C(80 ; 15 ; −170).

On a donc dans le triangle rectangle ABC : $\sin\widehat{\text{BAC}} = \dfrac{\text{BC}}{\text{AB}} = \dfrac{30}{30\sqrt{14}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$.

La calculatrice donne au dixième près : $\alpha \approx 15{,}5$degres.

3.

Solution : Soit $z_2(t)$ la profondeur du second sous-marin en fonction du temps et v_2 sa vitesse verticale constante (en mètres par minute) alors, par définition on a $z_2(t) = z_2(0) + v_2 t$.

Or $z_2(0) = -68$ car $S_2(0)$ est de coordonnées $(68\ ;\ 135\ ;\ -68)$.

$v_2 = \dfrac{-248 - (-68)}{3} = -60$ car après 3 minutes, le sous-marin est à une profondeur de −248 m.

On en déduit $z_2(t) = -68 - 60t$.

Avec les mêmes notations on a, pour le premier sous-marin, $z_1(t) = 170 - 30t$

$z_1(t) = z_2(t) \iff -170 - 30t = -68 - 60t \iff t = \dfrac{102}{30} = 3{,}4$

Donc les deux sous-marins sont à la même profondeur après 3 min 24 s.

Exercice 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

1.

Solution : f_n est un quotient de deux fonctions dérivables sur [1 ; 5] dont le dénominateur ne s'annule pas donc f_n est dérivable sur [1 ; 5]

$f_n = \dfrac{u}{v} \Longrightarrow f_n' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v(x) = x^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = nx^{n-1} \end{cases}$

donc $\forall x \in [1\,;\,5]$, $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1} - nx^{n-1}\ln(x)}{x^{2n}} = \dfrac{x^{n-1}(1-n\ln(x))}{x^{2n}} = \dfrac{1-n\ln(x)}{x^{n+1}}$

2.

Solution : $f_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x) = \dfrac{1}{n} \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$ et $f_n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)}{\mathrm{e}^1} = \dfrac{1}{e}\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)$ A_n est donc de coordonnées $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\,;\,\dfrac{1}{e}\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)\right)$.

Donc tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x).$$

3. a.

Solution :

$1 \leqslant x \leqslant 5 \Longrightarrow 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(5)$ car $x \longmapsto \ln(x)$ est croissante sur [1 ; 5]

en divisant membre à membre par $x^n > 0$, on obtient bien pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle [1; 5] :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

b.

Solution :

Pour tout entier $n > 1$,
$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x &= \int_1^5 x^{-n}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{-n+1}\left[x^{-n+1}\right]_1^5 \\ &= \frac{1}{-n+1}\left(5^{-n+1}-1\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)\end{aligned}$$

c.

Solution :

$f_n(x) \geqslant 0$ sur [1 ; 5] donc l'aire cherchée est donnée par $\displaystyle\int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x$

on sait que pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle [1; 5] :

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

or l'intégrale conserve l'ordre donc $0 \leqslant \displaystyle\int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n}\,\mathrm{d}x = \ln(5)\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(5)}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty$ car 5>1 et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(5)}{n-1}$ =0 donc par opération sur les limites

on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^5 \frac{\ln(5)}{x^n}\,\mathrm{d}x$ =0

D'après le théorème des gendarmes on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ =0

la limite de l'aire est donc de 0 quand n tend vers $+\infty$

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1.

Solution : l'énoncé donne $p_{G_n}(G_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et $p_{\overline{G_n}}\left(\overline{G_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}$ donc $p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = \frac{1}{2}$

$p_2 = p(G_2) = p(G_2 \cap G_1) + p\left(G_2 \cap \overline{G_1}\right)$ d'après les probabilités totales

$\quad = p_{G_1}(G_2) \times p(G_1) + p_{\overline{G_1}}(G_2) \times p\left(\overline{G_1}\right)$

$\quad = \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{2}(1-p_1)$

$\quad = \frac{1}{16} + \frac{3}{8} = \frac{7}{16}$

2.

Solution : G_n et $\overline{G_n}$ forment une partition de l'univers donc

$p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_{n+1} \cap G_n) + P\left(G_{n+1} \cap \overline{G_n}\right)$ d'après les probabilités totales

$\quad = P_{G_n}(G_{n+1}) \times P(G_n) + P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \times P\left(\overline{G_n}\right)$

$\quad = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}(1-p_n)$

$\quad = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$

3.

Solution : Il semblerait que (p_n) converge vers 0,4

4. a.

Solution :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5}$

$\quad = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10}$

$$= -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{4}u_n$$

On en déduit que (u_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$

b.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Or $u_n = p_n - \frac{2}{5}$ donc on a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c.

Solution : $-1 < \left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ =0 et par opération sur les limites,

$\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{5}$.

On en déduit qu'après un grand nombre de parties, la probabilité de gagner se stabilise aux alentours de $\frac{2}{5}$

Exercice 5 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.

Solution :

```
A ← 0
B ← 1
Pour i allant de 1 à n :
    C ← A + B
    A ← B
    B ← C
Fin Pour
```

2.

Solution :

$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ donc $A^2 = \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 2\end{pmatrix}$ et $A^5 = \begin{pmatrix}8 & 5\\5 & 3\end{pmatrix}$

3. **a.**

Solution : $A^p = \begin{pmatrix}a_{p+1} & a_p\\a_p & a_{p-1}\end{pmatrix}$ et $A^q = \begin{pmatrix}a_{q+1} & a_q\\a_q & a_{q-1}\end{pmatrix}$

$A^p \times A^q = A^{p+q} = \begin{pmatrix}a_{p+q+1} & a_{p+q}\\a_{p+q} & a_{p+q-1}\end{pmatrix}$

On en déduit, en calculant le terme de A^{p+q} situé sur la seconde ligne et première colonne que pour tous entiers naturels non nuls p et q,

$a_{p+q} = a_p \times a_{q+1} + a_{p-1} \times a_q$

b.

Solution : si r divise a_p et a_q alors il existes deux entiers k et k' tels que $a_p = rk$ et $a_q = rk'$.

On a alors $a_{p+q} = rk \times a_{q+1} + a_{p-1} \times rk' = r\left(k \times a_{q+1} + a_{p-1} \times k'\right)$.

Or $\left(k \times a_{q+1} + a_{p-1} \times k'\right) \in \mathbb{Z}$.

Donc on en déduit que si un entier r divise les entiers a_p et a_q, alors r divise également a_{p+q}

c.

Solution :

Initialisation : pour $n = 1$

a_p divise évidemment $a_{1\times p}$

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul tel que a_p divise a_{np} donc il existe un entier k tel que $a_{np} = k \times a_p$ alors

$$\begin{aligned} a_{(n+1)p} = a_{np+p} &= a_{np} \times a_{p+1} + a_{np-1} \times a_p \\ &= a_p \times \left(k \times a_{p+1} + a_{np-1}\right) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Or $\left(k \times a_{p+1} + a_{np-1}\right) \in \mathbb{Z}$

On en déduit que a_p divise $a_{(n+1)p}$

La propriété est donc héréditaire à partir du rang $n = 1$ or elle est vérifiée à ce rang 1 donc par le principe de récurrence on vient de montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et p, a_p divise a_{np}.

4. a.

Solution :

Si $n \geqslant 5$ n'est pas premier alors il existe deux entiers naturels

$m \geqslant 3$ et $p \geqslant 2$ tels que $n = mp$ alors $a_n = a_{mp}$ est divisible par a_m d'après la question précédente.

Or pour tout entier $m \geqslant 3$, $a_m > 1$ donc a_n n'est pas premier car divisible par a_m qui est un entier supérieur strictement à 1

Finalement si $n \geqslant 5$ n'est pas premier alors a_n n'est pas premier.

b.

Solution : 4 181 n'est pas un nombre premier mais 19 est premier donc si a_n n'est pas premier, n peut l'être.

On peut conclure que la réciproque de la propriété précédente est fausse.