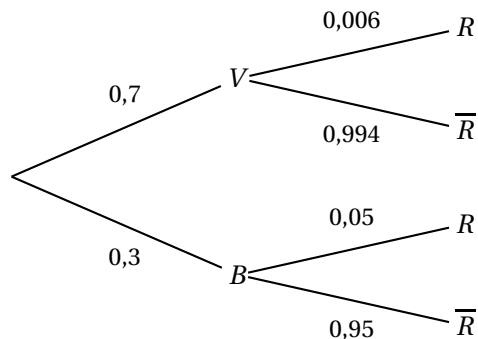


∞ Corrigé du baccalauréat S Liban 27 mai 2014 ∞

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1.



2. D'après l'arbre ci-dessus  $p(V \cap R) = 0,7 \times 0,006 = 0,0042$ .

3. D'après l'arbre ci-dessus, la probabilité de l'évènement R est

$$p(R) = p(V \cap R) + p(B \cap R) = 0,0042 + 0,3 \times 0,05 = 0,0192$$

4. On cherche à déterminer  $p_R(B)$  :

$$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{0,3 \times 0,05}{0,0192} = 0,78125$$

Partie B : le vélo

1. Cela revient à calculer  $p(15 \leq T \leq 20)$ . À la calculatrice, nous obtenons,

$$p(15 \leq T \leq 20) = 0,946$$

2. Il sera en retard au lycée si il met plus de 20 minutes pour effectuer le trajet. On cherche donc la probabilité de l'évènement «  $T \geq 20$  ». À la calculatrice, nous obtenons

$$p(T \geq 20) = 0,0062$$

3. On cherche la durée maximale de son temps de parcours  $T_0$  (en minutes) tel que  $p(T \leq T_0) = 0,9$ . À la calculatrice, nous obtenons

$$p(T \leq 18,5379) = 0,9$$

Ce qui signifie qu'il a une probabilité de 0,9 de mettre moins de 18 minutes et 30 secondes (environ). Il peut donc partir au plus tard à 8 heures moins 18 minutes et 30 secondes, soit à 7 h 41 minutes et 30 secondes. À une minute près, il peut partir au maximum à 7 h 41, de sorte à avoir une probabilité d'arriver à l'heure de 0,9.

### Partie C : le bus

1. D'après le cours  $Z'$  suit une loi normale centrée-réduite.
2. Puisque  $p(T' \geq 20) = 0,05$ , il vient

$$p\left(\frac{T' - 15}{\sigma'} \geq \frac{20 - 15}{\sigma'}\right) = 0,05 \iff p\left(Z' \geq \frac{5}{\sigma'}\right) = 0,05$$

À la calculatrice, en considérant une loi normale centrée-réduite  $Z'$ , on trouve que

$$p\left(Z' \geq 1,6449\right) = 0,05$$

D'où

$$\frac{5}{\sigma'} = 1,6449$$

et donc

$$\sigma' = \frac{5}{1,6449} = 3,04 \quad \text{à} \quad 0,01 \quad \text{près}$$

**EXERCICE 2 (5 points)****Proposition 1 : VRAIE**

Il suffit de vérifier que les coordonnées des deux points A et B vérifient le système formé des trois équations paramétriques.

Pour  $t = 2$  on retrouve les coordonnées du point A, et pour  $t = 1$  celles du point B.

**Proposition 2 : VRAIE**

$\mathcal{D}$  est dirigée par  $\vec{d}$  de coordonnées  $(2, 1, 3)$  et  $(AB)$  par  $\vec{AB}$  de coordonnées  $(-2, 1, 1)$ .

Or  $\vec{AB} \cdot \vec{d} = -4 + 1 + 3 = 0$ , les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{d}$  sont donc orthogonaux, les droites  $\mathcal{D}$  et  $(AB)$  sont donc orthogonales.

**Proposition 3 : FAUSSE**

Pour savoir si ces deux droites sont coplanaires, il suffit de savoir si elles sont sécantes, car étant orthogonales elles ne pourront pas être parallèles.

Pour cela on résout le système

$$\begin{cases} 2t = 5 - 2t' & (1) \\ 1 + t = -1 + t' & (2) \\ -5 + 3t = -2 + t' & (3) \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre (3) et (2), il vient  $2t - 6 = -1$  soit  $t = \frac{5}{2}$ .

On remplace dans (2) :  $t' = -2 + t = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ .

On vérifie dans (1) :  $2t = 5$ , alors que  $5 - 2t' = 5 - 1 = 4$ . Ce qui signifie que ce système n'a pas de solution.

Puisque ces deux droites sont orthogonales et non sécantes, elles seront donc non coplanaires.

**Proposition 4 : FAUSSE**

On vérifie facilement que  $E \in \mathcal{P}$ , mais  $E \notin \mathcal{D}$ .

En effet, si on résout le système

$$\begin{cases} 8 = 2t \\ -3 = 1 + t \\ -4 = -5 + 3t \end{cases}$$

On trouve que  $t = 4$  dans la première équation, valeur qui ne convient pas dans la seconde équation.

**Proposition 5 : VRAIE**

Le vecteur  $\vec{n}$  de coordonnées  $(1, -1, 3)$  est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$ . Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ont pour coordonnées respectives  $(2, -1, -1)$  et  $(6, 0, -2)$ , d'où

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2 + 1 - 3 = 0 \quad \text{et} \quad \vec{n} \cdot \vec{AC} = 6 + 0 - 6 = 0$$

$\vec{n}$  est donc normal au plan  $(ABC)$ .

$\mathcal{P}$  et  $(ABC)$  ayant un vecteur normal commun sont donc parallèles.

**EXERCICE 3 (5 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = xe^{-x}$ . On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal.

**Partie A**

1.  $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$e^{-x}$  étant quel que soit  $x$ , strictement positif,  $f'(x)$  sera du signe de  $1-x$ .

Il s'ensuit que

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{sur} \quad [0, 1] \quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \quad \text{sur} \quad ]1, +\infty[$$

$f$  est donc croissante sur  $[0, 1]$  et décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

2. On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ , ce qui signifie que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe  $\mathcal{C}$

**Partie B**

Soit  $\mathcal{A}$  la fonction qui à tout réel  $t$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$  associe l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=t$ .

1. Comme la fonction  $f$  est continue et positive sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  alors

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t f(x) dx$$

et donc, pour tout  $t \in [0; +\infty[$   $\mathcal{A}'(t) = f(t)$

Comme  $f$  est positive sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  il s'ensuit que la fonction  $\mathcal{A}$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

2. On peut en déduire que la fonction  $\mathcal{A}$  a pour limite 1 en  $+\infty$ .
3. a. Dressons le tableau de variations de la fonction  $\mathcal{A}$  sur  $[0; +\infty[$  :

|                |   |           |
|----------------|---|-----------|
| $x$            | 0 | $+\infty$ |
| $\mathcal{A}'$ | + |           |
| $\mathcal{A}$  | 0 | 1         |

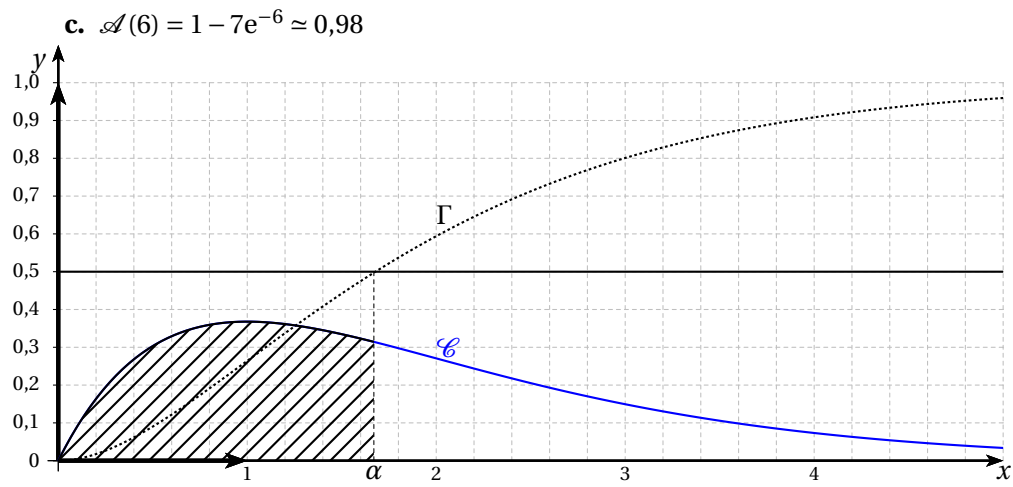
D'après ce tableau de variations l'équation  $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}$  admet une solution unique sur l'intervalle  $[0; +\infty[$

- b. Sur le graphique ci-joint, on obtient  $\alpha \simeq 1,7$

4. a.  $g'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$

b. On remarque que  $g'(x) = -f(x)$ , d'où

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t f(x) dx = \int_0^t -g'(x) dx = [-g(x)]_0^t = -g(t) + g(0) = 1 - (1+t)e^{-t}$$



**EXERCICE 4 (5 points)****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie par  $z_0 = \sqrt{3} - i$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$z_{n+1} = (1 + i)z_n$$

**Partie A**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = |z_n|$ .

1.  $u_0 = |z_0| = |\sqrt{3} - i| = 2$ .
2.  $u_{n+1} = |z_{n+1}| = |(1 + i)z_n| = |1 + i| \times |z_n| = \sqrt{2}|z_n| = \sqrt{2}u_n$
3. D'après le cours, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = 2(\sqrt{2})^n$  ;  $(u_n)$  est la suite géométrique de raison  $\sqrt{2}$  et de premier terme  $u_0 = 2$ .
4.  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $\sqrt{2} > 1$  et de premier terme strictement positif, elle diverge donc vers  $+\infty$ .

|                       |  |
|-----------------------|--|
| <b>Variables</b>      | : $u$ est un réel<br>$p$ est un réel<br>$n$ est un entier  |
| <b>Initialisation</b> | : Affecter à $n$ la valeur 0<br>Affecter à $u$ la valeur 2   |
| 5. <b>Entrée</b>      | : Demander la valeur de $p$  |
| <b>Traitement</b>     | : Tant que $u \leq p$ Faire<br>Affecter à $n$ la valeur $n + 1$<br>Affecter à $u$ la valeur $\sqrt{2} \times u$<br>Fin du Tant Que |
| <b>Sortie</b>         | : Afficher $n$   |

**Partie B**

1.  $z_1 = (1 + i) \times (\sqrt{3} - i) = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$ .
2.  $z_0 = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2e^{-i\pi/6}$   
 $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$   
 $z_1 = 2e^{-i\pi/6} \times \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12}$ .
3. Des deux questions précédentes, on obtient que

$$1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{2}e^{i\pi/12} = 2\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

D'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

**EXERCICE 4 (5 points)****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. Calculer  $a_1 = 0,95$ ,  $b_1 = 0,05$  et  $c_1 = 0$ .
2. **a.** 95% des individus restent sains d'un jour au jour suivant d'où

$$a_{n+1} = 0,95a_n$$

- b.** Au jour  $n + 1$ , 5% des individus sains ( $a_n$ ) deviennent malades (soit  $0,05a_n$ ) et 80% des individus malades  $b_n$  le reste ( $0,8b_n$ ), d'où

$$b_{n+1} = 0,05a_n + 0,8b_n$$

3. **a.** Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$A \times U_n = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a_n \\ 0,05a_n + 0,8b_n \\ 0,2b_n + c_n \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

- b.** *Initialisation* : c'est vrai pour  $n = 0$  car  $D^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

*Hérédité* : supposons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  alors :

$$D^{n+1} = D \times D^n = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est donc vrai au rang  $n + 1$

On a démontré que  $D^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  en-

traîne  $D^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,95^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Par le principe de récurrence, on a donc démontré

que pour tout entier naturel  $n$ ,  $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

4. **a.**  $U_n = A^n \times U_0$ , Soit

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n) & 0,8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0,95^n + 0,8^n) & 1 - 0,8^n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95^n \\ \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n) \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0,95^n + 0,8^n) \end{pmatrix}$$

d'où

$$b_n = \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n)$$

b.  $(b_n)$  est la somme de deux suites géométriques de raisons comprises entre 0 et 1 qui convergent vers 0, il en est donc de même de  $(b_n)$ .

c.

|  |   |                                  |                               |                                  |                                  |  |
|--|---|----------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--|
| <b>Variables</b>                               | : $b, b', x, y$ sont des réels<br>$k$ est un entier naturel   |                                  |                               |                                  |                                  |  |
| <b>Initialisation</b>                          | : Affecter à $b$ la valeur 0<br>Affecter à $b'$ la valeur 0,05<br>Affecter à $k$ la valeur 0<br>Affecter à $x$ la valeur 0,95<br>Affecter à $y$ la valeur 0,8   |                                  |                               |                                  |                                  |  |
| <b>Traitement</b>                              | : Tant que $b < b'$ faire :<br><table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr><td>Affecter à <math>k</math> la valeur <math>k + 1</math></td></tr> <tr><td>Affecter à <math>b</math> la valeur <math>b'</math></td></tr> <tr><td>Affecter à <math>x</math> la valeur <math>0,95x</math></td></tr> <tr><td>Affecter à <math>y</math> la valeur <math>0,80y</math></td></tr> <tr><td>Affecter à <math>b'</math> la valeur <math>\frac{1}{3}(x - y)</math></td></tr> </table><br>Fin Tant que | Affecter à $k$ la valeur $k + 1$ | Affecter à $b$ la valeur $b'$ | Affecter à $x$ la valeur $0,95x$ | Affecter à $y$ la valeur $0,80y$ | Affecter à $b'$ la valeur $\frac{1}{3}(x - y)$ |
| Affecter à $k$ la valeur $k + 1$               |   |                                  |                               |                                  |                                  |  |
| Affecter à $b$ la valeur $b'$                  |   |                                  |                               |                                  |                                  |  |
| Affecter à $x$ la valeur $0,95x$               |   |                                  |                               |                                  |                                  |  |
| Affecter à $y$ la valeur $0,80y$               |   |                                  |                               |                                  |                                  |  |
| Affecter à $b'$ la valeur $\frac{1}{3}(x - y)$ |   |                                  |                               |                                  |                                  |  |
| <b>Sortie</b>                                  | : Afficher $k$  |                                  |                               |                                  |                                  |  |

|  | $k$ | $b$    | $x$    | $y$    | $b'$   | Test : $b < b'$ ? |
|--|-----|--------|--------|--------|--------|-------------------|
| Après le 7 <sup>e</sup> passage dans la boucle Tant que          | 7   | 0,1628 | 0,6634 | 0,1678 | 0,1652 | VRAI              |
| Après le 8 <sup>e</sup> passage éventuel dans la boucle Tant que | 8   | 0,1652 | 0,6302 | 0,1342 | 0,1653 | VRAI              |
| Après le 9 <sup>e</sup> passage éventuel dans la boucle Tant que | 9   | 0,1653 | 0,5987 | 0,1073 | 0,1637 | FAUX              |

Pour chaque ligne du tableau,  $b$  désigne  $b_k$  et  $b'$  désigne  $b_{k+1}$  ; on a donc :

|       |        |        |        |        |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| $k$   | 7      | 8      | 9      | 10     |
| $b_k$ | 0,1628 | 0,1652 | 0,1653 | 0,1637 |

Le rang du jour où le pic épidémique est atteint est donc le 9.