Corrigé du baccalauréat S Liban 28 mai 2013

Exercice 1 (4 points)

Question 1 :

Réponse d

Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{d}(1,\ 2,\ 3)$, un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$ est le vecteur $\overrightarrow{d'}(1,\ 1,\ -1)$. $\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{d'} = 1+2-3 = 0$.
Ces deux vecteurs sont orthogonaux, les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont donc orthogonales.
Aussi par élimination : la a. est fausse car les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, b. est fausse car il n'y a pas de point d'intersection et c. est fausse car C n'est pas sur D.

Question 2 :

Réponse c

Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur $\overrightarrow{n}(1, 1, -1)$.
Ce vecteur est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}'$.
Ce qui entraîne que ce plan est orthogonal à la droite $\mathscr{D}'$.

Question 3 :

Réponse c

$\text{AB} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$, $\quad \text{AC} = \sqrt{16+36+4} = \sqrt{56}$, $\quad \text{BC} = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56}$.
Ces trois distances sont égales, il en résulte que le triangle ABC est équilatéral.

Question 4 :

Réponse b

Pour déterminer lequel de ces vecteurs est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$, il suffit de vérifier si ces vecteurs sont orthogonaux à deux vecteurs de $\mathscr{P}'$ qui sont non colinéaires.
Prenons $\overrightarrow{d'}(1,\ 1,\ -1)$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\text{AD}'}$, où A$(1,\ -1,\ 2)$ et D$'$ est un point de $\mathscr{D}'$, par exemple celui de coordonnées $(1,\ 3,\ 4)$, soit $\overrightarrow{\text{AD}'}(0,\ 4,\ 2)$.
On vérifie que $\overrightarrow{d'}$ et $\overrightarrow{\text{AD}'}$ ne sont pas colinéaires, et on constate que, dans le second cas :

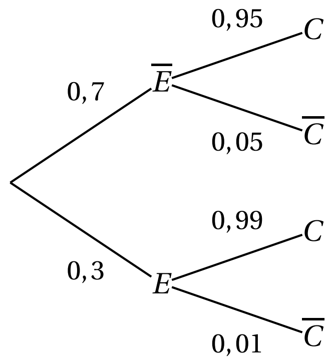
$$\overrightarrow{d'}\cdot\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\text{AD}'}\cdot\overrightarrow{n} = 0$$

Ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{n}(3,\ -1,\ 2)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

1.



2. On cherche $P\left(C\cap\overline{E}\right)=P_{\overline{E}}(C)\times P\left(\overline{E}\right)=0,95\times 0,70=0,665$

3. D'après la formule des probabilités totales :
$P(C)=P\left(C\cap\overline{E}\right)+P(C\cap E)=0,665+0,99\times 0,30=0,962.$

4. $P_C(E)=\dfrac{P(E\cap C)}{P(C)}=\dfrac{0,99\times 0,30}{0,962}\approx 0,309$ à 10^{-3} près

Partie B

1. X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0,17\ ;\ 0,006^2\right)$.
On cherche à calculer la probabilité $P(0,16\leqslant X\leqslant 0,18)$ qui est égale à 0,904 4 d'après la table.

a. D'après le cours, comme Y suit une loi normale $\mathcal{N}\left(m_2\ ;\ \sigma_2^2\right)$, alors $Z=\dfrac{Y-m_2}{\sigma_2}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

b.

$$0,16\leqslant Y\leqslant 0,18 \iff \frac{0,16-0,17}{\sigma_2}\leqslant\frac{Y-0,17}{\sigma_2}\leqslant\frac{0,18-0,17}{\sigma_2}$$

soit
$$-\frac{0,01}{\sigma_2}\leqslant Z\leqslant\frac{0,01}{\sigma_2}$$

Donc lorsque Y appartient à l'intervalle $[0,16\ ;\ 0,18]$, alors Z appartient à l'intervalle
$\left[-\dfrac{0,01}{\sigma_2}\ ;\ \dfrac{0,01}{\sigma_2}\right]$.

c. On sait que cette probabilité doit être égale à 0,990, le tableau donné permet d'obtenir

$$\beta=2,5758$$

d'où
$$\frac{0,01}{\sigma_2}=2,5758\Leftrightarrow\sigma_2=0,00385$$

En conclusion, à 10^{-3} près, $\sigma\approx 0,004$.

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

1. Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \text{e}^{-x} = 0$, il vient, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_1(x) = 1$
Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$, il vient, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f_1(x) = 0$
Graphiquement cela signifie que les droites d'équation $y = 0$ et $y = 1$ sont deux asymptotes horizontales à $\mathscr{C}_1$ au voisinage respectivement de moins et plus l'infini.
2. $f_1(x) = \dfrac{\text{e}^x \times 1}{\text{e}^x(1+\text{e}^{-x})} = \dfrac{\text{e}^x}{\text{e}^x+1} = \dfrac{\text{e}^x}{1+\text{e}^x}$
3. $f_1' = -\dfrac{-\text{e}^{-x}}{(1+\text{e}^{-x})^2} = \dfrac{\text{e}^{-x}}{(1+\text{e}^{-x})^2}$.
Cette expression étant toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$, il en résulte que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4.

$$I = \int_0^1 f_1(x)\,\text{d}x = \int_0^1 \frac{\text{e}^x}{1+\text{e}^x}\,\text{d}x = \left[\ln(1+\text{e}^x)\right]_0^1 = \ln(1+\text{e}) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+\text{e}}{2}\right)$$

I s'interprète graphiquement comme la mesure en unité d'aires du domaine limité par $\mathscr{C}_1$, l'axe des x et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. C'est l'aire du rectangle de côté 1 et de longueur $\ln\left(\dfrac{1+\text{e}}{2}\right)$ qui vaut à peu près 0,62 unité d'aire (ce qui se vérifie visuellement sur l'annexe).

Partie B

$P\left(x\,;\,f_1(x)\right)$ et $M\left(x\,;\,f_{-1}(x)\right)$. K est le milieu de $[MP]$.

1. $f_1(x) + f_{-1}(x) = \dfrac{\text{e}^x}{\text{e}^x+1} + \dfrac{1}{\text{e}^x+1} = \dfrac{\text{e}^x+1}{\text{e}^x+1} = 1$
2. $y_K = \dfrac{y_M + y_P}{2} = \dfrac{f_1(x) + f_{-1}(x)}{2} = \dfrac{1}{2}$
Le point K est donc un point de la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
3. Il résulte de la question précédente que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.
4. Soit $\mathscr{A}$ l'aire du domaine considéré. Par symétrie entre les deux courbes, on obtient

$$\mathscr{A} = 2\int_0^1 f_1(x) - \frac{1}{2}\,\text{d}x = 2\int_0^1 f_1(x)\,\text{d}x - \int_0^1 \text{d}x = 2\ln\left(\frac{1+\text{e}}{2}\right) - 1 \approx 0,24.$$

Partie C

1. **Vrai** : Quel que soit $k \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-kx} > 0 \Rightarrow 1 + \mathrm{e}^{-kx} > 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-kx}} < 1$.
2. **Faux** : On a vu que la fonction f_{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. **Vrai** : Car si $k \geqslant 10$ alors $-\dfrac{1}{2}k \leqslant -5$ puis $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k} \leqslant \mathrm{e}^{-5}$ par croissance de la fonction exponentielle et enfin $1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k} \leqslant 1 + \mathrm{e}^{-5}$.
   Finalement :

$$0,99 < 0,993\,3 \leqslant \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-5}} \leqslant \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k}} = f_k\left(\frac{1}{2}\right)$$

EXERCICE 4 : Enseignement obligatoire uniquement **(5 points)**

Partie A

1. L'algorithme n° 1 calcule tous les termes de v_0 à v_n mais n'affiche que le dernier v_n.
   L'algorithme n° 2 calcule n fois de suite v_1 à partir de v_0 : il ne calcule pas les termes de 0 à v_n.
   L'algorithme n° 3 calcule tous les termes de 0 à v_n et les affiche tous.
2. D'après les tables de valeurs de la suite (qui correspond en fait à $n = 9$), il semblerait que la suite soit croissante et converge vers un nombre proche de 3.
3. **a.** Montrons par récurrence la propriété P_n : pour tout entier naturel $n,\ 0 < v_n < 3$.
   Initialisation : $n = 0$, on a bien $0 < v_0 < 3$ vraie, puisque $v_0 = 1$; ainsi P_0 est vraie.
   Hérédité : Soit n naturel tel que P_n est vraie et montrons alors que P_{n+1} est vraie.
   On suppose donc que $0 < v_n < 3$.
   Les opposés étant rangés dans l'ordre inverse :
   $-3 < -v_n < 0$.
   L'addition respecte l'ordre, donc
   $6-3 < 6-v_n < 6$ ou $3 < -v_n < 6$.
   Les inverses de ces nombres positifs sont rangés dans l'ordre inverse :
   $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{6-v_n} < \dfrac{1}{3}$.
   Enfin la multiplication par un réel positif respecte l'ordre :
   $9 \times \dfrac{1}{6} < 9 \times \dfrac{1}{6-v_n} < 9 \times \dfrac{1}{3}$, soit $\dfrac{3}{2} < \dfrac{9}{6-v_n} < 3$ et enfin
   $0 < \dfrac{3}{2} < v_{n+1} < 3$. L'hérédité est établie puisque P_{n+1} est vraie.
   Conclusion : par le principe de récurrence, P_0 est vraie et si pour $n \in \mathbb{N}$, P_n vraie alors P_{n+1} est aussi vraie, donc on a démontré que pour tout naturel $n,\ P_n$:
   $0 < v_n < 3$ est vraie.

   b. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{9}{6-v_n} - v_n = \dfrac{9-v_n(6-v_n)}{6-v_n} = \dfrac{9-6v_n+v_n^2}{6-v_n}\dfrac{(v_n-3)^2}{6-v_n}$.
   Or, d'après la question précédente, $0 < v_n < 3$ pour tout n entier naturel ; on en déduit
   - $v_n - 3 > 0$, donc $()^2 > 0$ et
   - $v_n < 3 < 6$, donc $6 - v_n > 0$, donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(v_n-3)^2}{6-v_n} > 0$, ainsi la suite (v_n)

   est (strictement) croissante.

   c. Comme la suite est majorée par 3 et croissante, alors elle converge vers une limite inférieure ou égale à 3.

Partie B

1. $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{v_{n+1}-3} - \dfrac{1}{v_n-3} = \dfrac{1}{\frac{9}{6-v_n}-3} - \dfrac{1}{v_n-3} = \dfrac{6-v_n}{3v_n-9} - \dfrac{1}{v_n-3} = \dfrac{6-v_n-3}{3v_n-9} = \dfrac{-v_n+3}{3v_n-9} = -\dfrac{v_n-3}{3(v_n-3)} = -\dfrac{1}{3}$.

Ainsi la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{3}$.

2. $w_n = w_0 + nr = \dfrac{1}{1-3} - \dfrac{1}{3}n = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}n$.

Comme $w_n = \dfrac{1}{v_n-3}$, on a $v_n = \dfrac{1}{w_n} + 3 = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}n} + 3 = \dfrac{6}{-3-2n} + 3$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{6}{-3-2n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 3$.

EXERCICE 4 : Enseignement de spécialité uniquement **(5 points)**

1. $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 40 - 18 = 22$
   $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 110 - 48 = 62$

2. **a.** « b prend la valeur $5a - 6c$ »

   b. La suite semble être croissante.

3. $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Prouvons par récurrence que $C_n = A^n C_0$.
   Initialisation : c'est vrai pour $n = 0$, car A^0 est la matrice identité.
   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $C_n = A^n C_0$, alors $C_{n+1} = AC_n = A(A^n C_0) =$
   $A \times A^n C_0 = A^{n+1} C_0$.
   En conclusion, $C_0 = A^0 C_0$ et si pour $n \in \mathbb{N}$, $C_n = A^n C_0$ alors $C_{n+1} A^{n+1} C_0$; on a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel n, $C_n = A^n C_0$.

4. $QP = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -3+3 \\ 2-2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. *Initialisation* : c'est trivialement vrai pour $n = 1$.
   Hérédité : soit $\in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$ tel que $A^n = PD^nQ$, alors :
   $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nQ(PDQ) = PD^n(QP)DQ = PD^nDQ = PD^{n+1}Q$.
   La relation est vraie au rang 1 et si elle est vraie à un rang n au moins égal à 1, elle est vraie au rang suivant. On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout entier naturel n, non nul $A^n = PD^nQ$.

6. Puisque $C_n = A^n C_0$, on obtiendra u_n comme la somme :

   $$u_n = 8(-2^n + 3^n) + 3(3 \times 2^n - 2 \times 3^n) = -8 \times 2^n + 8 \times 3^n + 9 \times 2^n - 6 \times 3^n = 2^n + 2 \times 3^n.$$

   Les deux suites de terme général 2^n et 3^n ayant pour limite $+\infty$, il en résulte que la suite (u_n) n'a pas de limite finie, mais a une limite infinie (on dit qu'elle diverge vers $+\infty$).

ANNEXE de l'EXERCICE 3, à rendre avec la copie

Représentations graphiques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{-1}$ des fonctions f_1 et f_{-1}