

∞ Corrigé du baccalauréat S Liban mai 2012 ∞

Exercice 1

6 points

Commun à tous les candidats.

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x$$

1. Variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

$$g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x} > 0, \text{ car somme de nombres positifs sur }]0; +\infty[$$

La fonction g est donc croissante sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variations :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. La fonction g est continue (comme somme de fonctions continues) et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-\infty; +\infty[$.

Or $0 \in]-\infty; +\infty[$, 0 possède donc un unique antécédent, que l'on notera α . Nous avons donc $g(\alpha) = 0$.

De plus,

$$\begin{cases} g(0,86) \simeq -0,0295 < 0 \\ g(0,87) \simeq +0,0385 > 0 \end{cases} \implies g(0,86) < g(\alpha) = 0 < g(0,87) \iff \boxed{0,86 < \alpha < 0,87}$$

3. Signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

$$\begin{cases} 0 < x < \alpha \implies g(x) < g(\alpha) = 0 \\ x > \alpha \implies g(x) > g(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. • Limite de la fonction f en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

- Limite de la fonction f en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ (puissances comparées)}$$

2. La courbe \mathcal{C} admet pour asymptote oblique la droite Δ d'équation $y = 2x$.

En effet :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

- Le signe de $f(x) - 2x = -\frac{\ln x}{x^2}$ est celui de $-\ln x$, car $x^2 > 0$:
- Position relative de la courbe \mathcal{C} et de la droite Δ :
 - Sur $]0; 1[$, $-\ln x > 0$, \mathcal{C} est au dessus de Δ ,
 - sur $]1; +\infty[$, $-\ln x < 0$, \mathcal{C} est en dessous de Δ ,
 - \mathcal{C} et Δ ont un point commun $A(1,2)$.

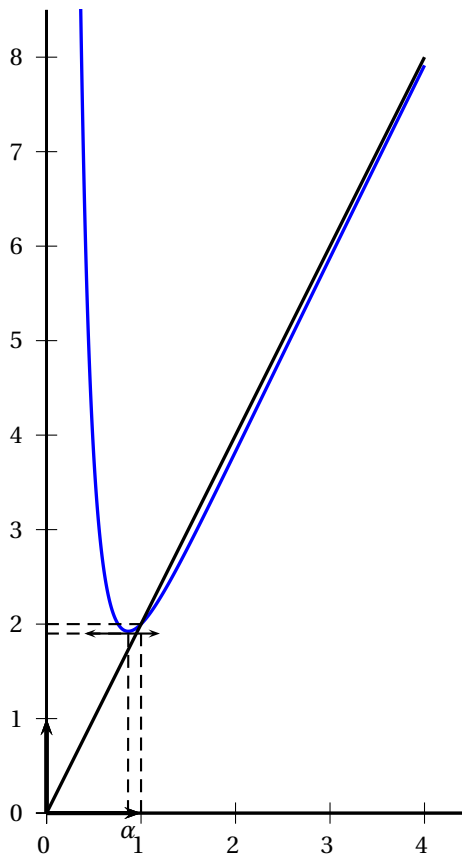
3. Dérivée $f'(x)$ de f :

$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{2x^4 - x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{2x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

$f'(x)$ a même signe que $g(x)$ car x^3 est strictement positif sur $]0; +\infty[$.

4. Tableau de variations de la fonction f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$



Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine \mathcal{D} du plan compris entre la courbe \mathcal{C} , la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1. Cette aire, exprimée en cm^2 , est donnée par (u.a.; (unité d'aire)= 2 cm^2) :

$$I_n = 2 \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

car l'aire du domaine \mathcal{D} du plan compris entre la courbe \mathcal{C} , la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$ est :

$$\int_1^n \left(2x - \left(2x - \frac{\ln x}{x^2} \right) \right) dx \times \text{u.a.} = \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx \times \text{u.a.} = 2 \times \int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx = I_n$$

2. a. Calcul de l'intégrale $\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx$ à l'aide d'une intégration par parties :

On pose :

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x & ; & \quad u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) &= \frac{1}{x^2} & ; & \quad v(x) = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_1^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^n - \int_1^n -\frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^n = \frac{n-1-\ln n}{n}$$

b. Ainsi :

$$I_n = 2 \frac{n-1-\ln n}{n} = 2 - \frac{2}{n} - \frac{2 \ln n}{n}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 2, \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln n}{n} = 0$$

Exercice n° 2

4 points

Commun à tous les candidats.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 6 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = 6 + t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}.$$

On cherche le point d'intersection éventuel $M(x; y; z)$ de ces deux droites :

$$\begin{cases} x = 4 + t = 8 + 5t' \\ y = 6 + 2t = 2 - 2t' \\ z = 4 - t = 6 + t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - 5t' = 4 \\ 2t + 2t' = -4 \\ -t - t' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - 5t' = 4 \\ t + t' = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6t' = -6 \\ t + t' = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -1 \end{cases}$$

Les deux droites ont donc comme point commun $M(4-1; 6-2; 4+1) = (3; 4; 5)$.

Affirmation : les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont coplanaires.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(12; 7; -13)$ et $B(3; 1; 2)$ ainsi que le plan \mathcal{P} d'équation $3x + 2y - 5z = 1$.

Le point $B(3; 1; 2)$ appartient au plan \mathcal{P} , car $3 \times 3 + 2 \times 1 - 5 \times 2 = 1$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$ est colinéaire à un vecteur normal du plan : $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AB} = -3\vec{n}$.

Affirmation : le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan \mathcal{P} .

3. On considère les suites u et v définies, pour tout entier naturel n , par :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{et} \quad v_n = 2 + \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+2} - 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \times 1}{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)} - 2 = -1 \neq 0$$

Affirmation : ces deux suites ne sont pas adjacentes.

4. On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Démonstration par récurrence :

- $u_0 = 1 < 3$
- Supposons que pour tout n , on ait : $u_n \leq 3$

$$u_n \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3}u_n \leq 1 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \leq 3$$

- Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq 3$

Affirmation : cette suite est majorée par 3.

Exercice n° 3**5 points****Commun à tous les candidats.**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.

L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.

Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1 , à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.

On considère les évènements suivants :

J_1 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

J_3 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question 4.b) où une valeur arrondie à 10^{-2} suffit.

1. Probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement J_1 est réalisé :

$$P_{J_1}(B) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{10}{1}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

De même la probabilité $P_{J_2}(B)$ est :

$$P_{J_2}(B) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

Et :

$$P_{J_3}(B) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} \quad \text{et} \quad P_{J_4}(B) = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{210}$$

2. Calcul de $P(B)$, probabilité de l'évènement B :

$$P(B) = P(B \cap J_1) + P(B \cap J_2) + P(B \cap J_3) + P(B \cap J_4) =$$

$$P_{J_1}(B) \times P(J_1) + P_{J_2}(B) \times P(J_2) + P_{J_3}(B) \times P(J_3) + P_{J_4}(B) \times P(J_4) =$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{15} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{30} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{210} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{84+28+7+1}{210} \right) = \frac{1}{7}$$

3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. La probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 correspond à $P_B(J_3)$

$$P_B(J_3) = \frac{P(B \cap J_3)}{P(B)} = \frac{P_{J_3}(B) \times P(J_3)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{30} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{7}} = \frac{7}{120}$$

4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.

a. La loi suivie par la variable aléatoire N est une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = P(B) = \frac{1}{7}$.

b. Probabilité de l'évènement ($N = 3$) :

$$P(N = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{7} \right)^3 \left(\frac{6}{7} \right)^7 = 120 \times \frac{6^7}{7^{10}} \approx 0,12$$

Exercice n° 4

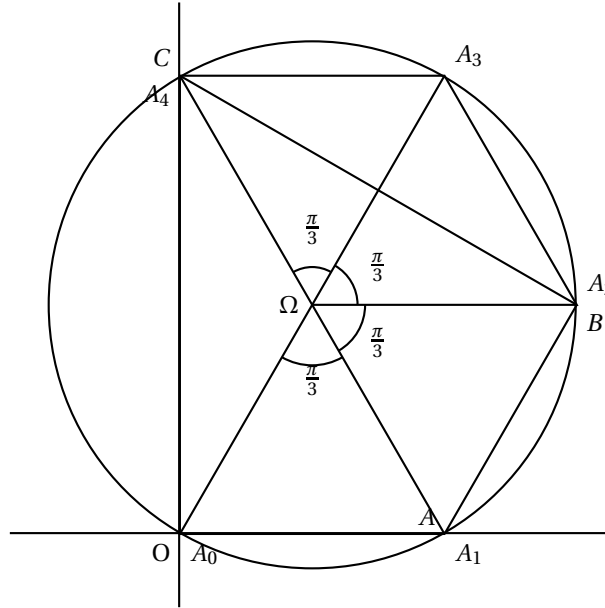
5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. Un triangle

a. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2, b = 3 + i\sqrt{3}$ et $c = 2i\sqrt{3}$.



Mesure de l'angle \widehat{ABC} :

$$(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = \arg\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}\right) = \arg\left(\frac{(1+i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{R})$$

b. ABC est donc un triangle rectangle en B . Le centre du cercle circonscrit à ce triangle est donc le milieu Ω de l'hypoténuse $[AC]$. Ainsi :

$$\omega = \frac{a+c}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$$

2. Une transformation du plan

On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initiale $z_0 = 0$, et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n .

a. Calculs des affixes des points A_2, A_3 et A_4 :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_0 + 2 = 2 = a & ; & \quad z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1 + 2 = 3+i\sqrt{3} = b \\ z_3 &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_2 + 2 = 2+2i\sqrt{3} & ; & \quad z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_3 + 2 = 2i\sqrt{3} = c \end{aligned}$$

On remarque que : $A_1 = A, A_2 = B$ et $A_4 = C$.

b. Longueurs des segments $[A_1A_2], [A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$:

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= |b-a| = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \\ A_2A_3 &= |2+2i\sqrt{3} - (3+i\sqrt{3})| = |-1+i\sqrt{3}| = 2 \\ A_3A_4 &= |2i\sqrt{3} - (2+2i\sqrt{3})| = 2. \end{aligned}$$

c. Pour tout entier naturel n , on a :

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2 - 1 - i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 1 - i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \left(z_n + \frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}} \right) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \left(z_n + 2 \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (z_n - \omega)$$

d. Le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$:

$$z_{n+1} - \omega = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (z_n - \omega) = e^{i\frac{\pi}{3}} (z_n - \omega)$$

e. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $A_{n+6} = A_n$. Déterminer l'affixe du point A_{2012} .

La composée de deux rotations de même centre Ω et d'angle α et β donne une rotation de centre Ω et d'angle $\alpha + \beta$.

Donc, si l'on compose six fois la même rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ à un point, on obtient la rotation de même centre et d'angle $6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$, c'est-à-dire l'identité.

Affixe du point A_{2012} est $b = 3 + i\sqrt{3}$:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & & & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & & & & & \\ 2 & & & & & & \end{array} \quad \Leftrightarrow 2012 = 6 \times 335 + 2 \Rightarrow A_{2012} = A_2 = B$$

3. Le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est un triangle équilatéral (isocèle de sommet Ω et d'angle au sommet $\frac{\pi}{3}$). Ainsi la longueur du segment $[A_n A_{n+1}]$ est la même que celle du segment $[\Omega A_n]$.

Comme A_n est l'image de A_0 par la rotation de centre Ω et d'angle $n \times \frac{\pi}{3}$, on a

$$\Omega A_n = \Omega A_0 = |0 - 1 - i\sqrt{3}| = 2$$

Exercice n° 4**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.**

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
On note z_n la suite de nombres complexes, de terme initiale $z_0 = 0$, et telle que :

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n + 1, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n .

1. Calculs des affixes des points A_1 , A_2 et A_3 .

$$z_1 = \frac{1+i}{2}z_0 + 1 = 1; \quad z_2 = \frac{1+i}{2}z_1 + 1 = \frac{3+i}{2}; \quad z_3 = \frac{1+i}{2}z_2 + 1 = \frac{3+2i}{2}$$

2. a. Le point A_{n+1} est l'image du point A_n par une similitude directe s :

z_{n+1} est de la forme $az_n + b$, où a et b sont deux nombres complexes ($a \neq 0$). Donc, A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe s .

- Son rapport est : $k = |a| = \left| \frac{1+i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
- son angle est $\theta = \text{Arg}\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; (parties réelle et imaginaire égales)
- son centre est le point fixe de la transformation ($s(\omega) = \omega$) :

$$\omega = \frac{1+i}{2}\omega + 1 \iff \omega\left(1 - \frac{1+i}{2}\right) = 1 \iff \omega\left(\frac{1-i}{2}\right) = 1 \iff \omega = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

b. Le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est isocèle rectangle :

Une similitude directe conserve les angles orientés, Ω est invariant, donc :

$$\left(\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}; \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{A_{n-1} A_n}\right) = \dots = \left(\overrightarrow{\Omega A_1}; \overrightarrow{A_0 A_1}\right)$$

Or

$$\left(\overrightarrow{\Omega A_1}; \overrightarrow{A_0 A_1}\right) = \text{Arg}\left(\frac{z_1 - z_0}{z_1 - \omega}\right) = \text{Arg}\left(\frac{1}{-i}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est donc rectangle. De plus

$$\left(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right) = \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est donc rectangle isocèle.

3. a. Pour tout entier naturel n , on a : $\Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$:

Le rapport de s est $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ce qui signifie que $\Omega A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n$.

La suite de terme général ΩA_n est une suite géométrique

- de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- et de premier terme $\Omega A_0 = |\omega| = |1+i| = \sqrt{2}$.

Ainsi :

$$\Omega A_n = \Omega A_0 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

- b. À partir de $n = 21$ les points A_n sont situés à l'intérieur du disque de centre Ω et de rayon 0,001 :

$$\Omega A_n \leq 0,001 \iff \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \leq 0,001 \iff (n-1) \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq \ln(0,001) \iff n \geq 1 + \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \simeq 20,9$$

Il y a changement de sens de l'inégalité car on divise de chaque côté par $\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ qui est négatif.

4. Pour tout entier naturel n , on note a_n la longueur $A_n A_{n+1}$ et L_n la somme $\sum_{k=0}^n a_k$.

L_n est ainsi la longueur de la ligne polygonal $A_0 A_1 \cdots A_n A_{n+1}$.

- Calcul de L_n :

Comme le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle isocèle en A_{n+1} , on a

$$a_n = A_n A_{n+1} = \Omega A_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

Ainsi :

$$L_n = \sum_{i=0}^n a_i = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

- Limite de L_n quand n tend vers $+\infty$:

Nous avons $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$.

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

5. Pour tout entier naturel n , les points A_n, Ω et A_{n+4} sont alignés :

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{\Omega A_{n+4}}\right) &= \left(\overrightarrow{\Omega A_n}; \overrightarrow{\Omega A_{n+1}}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}; \overrightarrow{\Omega A_{n+2}}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega A_{n+2}}; \overrightarrow{\Omega A_{n+3}}\right) + \\ \left(\overrightarrow{\Omega A_{n+3}}; \overrightarrow{\Omega A_{n+4}}\right) &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \pi + 2k\pi \end{aligned}$$