Corrigé du baccalauréat S Liban 31 mai 2011

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** Plusieurs méthodes : $\overrightarrow{\text{AB}}(-4~;~-4~;~4)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}(-1~;~-4~;~-2)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés. Ils constituent le plan (ABC).

   b. On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}} = -8+4+4 = 0$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} = -2+4+-2 = 0$.
   Donc $\overrightarrow{n}$ est normal à deux vecteurs du plan (ABC) est donc un vecteur normal à ce plan.

2. Le plan (P) a pour vecteur normal $\overrightarrow{p}(1~;~1~;~-1)$.
   Or $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{p} = 2-1-1 = 0$. Les vecteurs normaux aux deux plans sont orthogonaux, donc les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.

3. **a.** Par définition puisque $1-1+2 = 2 \neq 0$, le barycentre G existe et vérifie :
   $1\overrightarrow{\text{GA}} - 1\overrightarrow{\text{GB}} + 2\overrightarrow{\text{GC}} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{\text{GO}} + \overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{OB}} + 2\overrightarrow{\text{OC}} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{\text{OG}} = \overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{OB}} + 2\overrightarrow{\text{OC}} \iff$
   $\overrightarrow{\text{OG}} = \dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{\text{OA}} - \overrightarrow{\text{OB}} + 2\overrightarrow{\text{OC}}\right]$, ce qui se traduit pour les coordonnées $(x~;~y~;~z)$ de G par :
   $$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& \frac{1}{2}(1+3+0)\\ y &=& \frac{1}{2}(2+2-4)\\ z &=& \frac{1}{2}(-1-3-6)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x &=& 2\\ y &=& 0\\ z &=& -5\end{array}\right.$$
   On a bien G$(2~;~0~;~-5)$.

   b. $\overrightarrow{\text{CG}}(2~;~2~;~-2) = 2\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{p}$ étant un vecteur normal au plan (P). Donc la droite (CG) est orthogonale au plan (P).

   c. On sait que $M(x~;~y~;~z) \in \text{(CG)} \iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{C}M} = t\overrightarrow{\text{CG}} \iff \left\{\begin{array}{l c l} x-0 &=& 2t\\ y+2 &=& 2t\\ z+3 &=& -2t\end{array}\right. \iff$
   $$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 2t\\ y &=& -2+2t\\ z &=& -3-2t\end{array}\right.$$

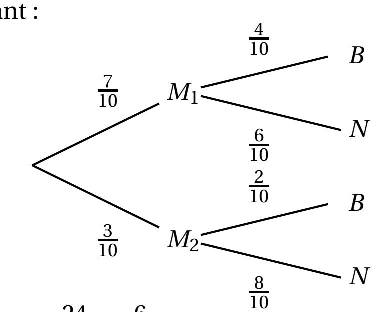
   d. Les coordonnées de H vérifient l'équation paramétrique de la droite (CG) et l'équation du plan (P) donc le système :
   $$\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 2t\\ y &=& -2+2t\\ z &=& -3-2t\\ x+y-z+2 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x &=& 2t\\ y &=& -2+2t\\ z &=& -3-2t\\ 2t-2+2t+3+2t+2 &=& 0\end{array}\right.$$
   $$\iff \left\{\begin{array}{l c l} x &=& 2t\\ y &=& -2+2t\\ z &=& -3-2t\\ 6t+3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l} x &=& 2t\\ y &=& -2+2t\\ z &=& -3-2t\\ t &=& -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$ soit en reportant dans les trois premières équations :
   $x=-1$, $y=-3$ et $z=-2$. Donc H$(-1~;~-3~;~-2)$.

4. En faisant intervenir grâce à la la relation de Chasles le barycentre G, on a :
   $\left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\right\| = 12 \iff \left\|\overrightarrow{M\text{G}} + \overrightarrow{\text{GA}} - \overrightarrow{M\text{G}} - \overrightarrow{\text{GB}} + 2\overrightarrow{M\text{G}} + 2\overrightarrow{\text{GC}}\right\| = 12 \iff$
   $\| \underbrace{\overrightarrow{\text{GA}} - \overrightarrow{\text{GB}} + 2\overrightarrow{\text{GC}}}_{=\overrightarrow{0}} + 2\overrightarrow{M\text{G}} \| = 12 \iff 2\text{G}M = 12 \iff \text{G}M = 6$: cette égalité signifie que M appartient à la sphère de centre G et de rayon 6.

5. Calculons la distance de G centre de la sphère au plan (P) :
$d(\text{G}\,;\,(P)) = \dfrac{|2-0+5+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \approx 5,2 < 6$ rayon de la sphère, ce qui montre la sphère et le plan sont sécants en un cercle dont le centre est le projeté de G sur le plan qui n'est autre que H puisqu'on a vu que la droite (CG) est orthogonale au plan (P) et que H est le point commun à (P) et à la droite (CG).
Le rayon r du cercle vérifie l'égalité de Pythagore : $r^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 6^2 \iff r^2 = 36-27 = 9 \Rightarrow r = 3$.
Le cercle de centre H et de rayon 3 est commun à la sphère et au plan (P).

EXERCICE 2 **3 points**
Commun à tous les candidats

1. On a l'arbre de probabilité suivant :



a. On a $p(M_2) \times p_{M_2}(N) = \frac{3}{10} \times \frac{8}{10} = \dfrac{24}{100} = \dfrac{6}{25}$. Réponse D.

b. On a $p(N) = p(M_1) \times p_{M_1}(N) + p(M_2) \times p_{M_2}(N) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{42}{100} + \frac{24}{100} = \frac{66}{100} = \frac{33}{50}$. Réponse B.

c. Il faut trouver $p_N(M_2) = \dfrac{p(N \cap M_2)}{p(N)} = \dfrac{\frac{6}{25}}{\frac{33}{50}} = \frac{6}{25} \times \frac{50}{33} = \dfrac{4}{11}$. Réponse A.

2. **a.** Le nombre de tirages favorables est $\binom{4}{3} = 4$ (tirage de 3 boules jaunes) et $\binom{3}{3} = 1$ (tirage de 3 boules bleues).
La probabilité est donc égale à : $\dfrac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{4+1}{\frac{9!}{3!6!}} = \dfrac{5}{3\times4\times7} = \dfrac{5}{84}$. Réponse C.

b. Il y a $4\times2\times3$ cas favorables. La probabilité cherchée est donc égale à :
$\dfrac{4\times2\times3}{\frac{9!}{3!6!}} = \dfrac{24}{3\times4\times7} = \dfrac{2}{7}$. Réponse A.

c. La probabilité de tirer 3 boules jaunes est égale à $\dfrac{4}{\frac{9!}{3!6!}} = \dfrac{4}{3\times4\times7} = \dfrac{1}{21}$. Donc la probabilité de ne pas avoir un tirage de 3 boules jaunes est égale à $\dfrac{20}{21}$.
La probabilité de ne pas avoir de tirage de 3 boules jaunes en n tirages est donc égale à $\left(\dfrac{20}{21}\right)^n$. La probabilité de l'évènement contraire « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » est égale à $1-\left(\dfrac{20}{21}\right)^n$.
Il faut donc résoudre l'inéquation :
$1-\left(\dfrac{20}{21}\right)^n \geqslant 0,99 \iff \left(\dfrac{20}{21}\right)^n \leqslant 0,01 \iff n\ln\left(\dfrac{20}{21}\right) \leqslant \ln 0,01 \iff$

$\left(\text{car } \ln\left(\dfrac{20}{21}\right) < 0\right) \quad n \geqslant \dfrac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{20}{21}\right)}$. Or $\dfrac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{20}{21}\right)} \approx 94,4$.

Il faut donc réaliser au moins 95 expériences. Réponse C.

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement obligatoire

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Démonstration classique.

Partie B

1. On a $|z_{\text{A}}|^2 = 1+1 = 2 \Rightarrow |z_{\text{A}}| = \sqrt{2}$. En factorisant ce module :

$z_{\text{A}} = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4} + \text{i}\sin -\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\text{e}^{-\frac{\pi}{4}}$. Le module est égal à $\sqrt{2}$ et un argument est $-\dfrac{\pi}{4}$.

2. a. $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \dfrac{2+\sqrt{3}+\text{i}}{1-\text{i}} = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}+\text{i}\right)(1+\text{i}}{(1-\text{i})(1+\text{i})} = \dfrac{2+\sqrt{3}-1+\text{i}\left(2+\sqrt{3}+1\right)}{1+1} = \dfrac{1+\sqrt{3}+\text{i}\left(3+\sqrt{3}\right)}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + \text{i}\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

b. Calculons le module :

$\left|\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}}\right|^2 = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4} + \dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{4} = \dfrac{1+3+2\sqrt{3}+9+3+6\sqrt{3}}{4} = \dfrac{16+8\sqrt{3}}{4} = 4+2\sqrt{3}$.

Or $4+2\sqrt{3} = 1+3+2\times 1\times\sqrt{3} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$. Donc $\left|\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}}\right| = 1+\sqrt{3}$.

En factorisant ce module on obtient :

$\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}} = \left(1+\sqrt{3}\right)\left[\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}\dfrac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right] = \left(1+\sqrt{3}\right)\left[\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}\right] = \left(1+\sqrt{3}\right)\left[\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(3-3+\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)}{1-3}\right] = \left(1+\sqrt{3}\right)\left[\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] = \left(1+\sqrt{3}\right)\left[\cos\frac{\pi}{3} + \text{i}\sin\frac{\pi}{3}\right] = \left(1+\sqrt{3}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

c. On a donc $z_{\text{B}} = \left(1+\sqrt{3}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} \times z_{\text{A}} = \left(1+\sqrt{3}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}\text{e}^{-\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{12}}$.

3. a. Par définition, tout point M d'affixe z a pour image le point M' d'affixe z' tel que $z' = z\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

Donc en utilisant l'écriture exponentielle de z_{B}, on a

$z_{\text{B}_1} = \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{12}} \times \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{12}}$.

b. On constate que $z_{\text{B}_1} = \overline{z_{\text{B}}}$ ce qui signifie géométriquement que B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right)$.

a. O a pour image par la rotation le point O qui a pour symétrique par rapport à l'axe $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right)$ le point O : le point O est donc invariant.

B a pour image par la rotation le point B_1 qui a pour symétrique par rapport à l'axe $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{u}\right)$ le point B : le point B est lui aussi invariant.

b. M d'affixe $\rho e^{i\theta}$ a pour image par la rotation le point M_1 d'affixe $\rho e^{i\theta} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} = \rho e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}$.

Ce point M_1 a pour symétrique autour de l'axe $\left(O~;~\overrightarrow{u}\right)$ le point de même module mais d'argument opposé soit $z_{M'} = \rho e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)}$.

On a donc $M = M' \iff \rho e^{i\theta} = \rho e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)} \iff \theta = \frac{\pi}{6} - \theta \mod 2\pi \iff 2\theta = \frac{\pi}{6} \mod 2\pi \iff \theta = \frac{\pi}{12} \mod \pi$.

c. L'ensemble (E) est donc la droite privée de O contenant tous les points d'argument $\frac{\pi}{12}$, donc en particulier le point B ; mais on a vu que O était invariant donc (E) est la droite (OB).

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Partie B

1. Par définition si k est le rapport de la similitude, alors CB = kDC. Or puisque ABC est rectangle isocèle en A, CB = CA$\sqrt{2}$ = CD$\sqrt{2}$. Le rapport de la similitude est donc égal à $\sqrt{2}$.

   L'angle est égal à $\left(\overrightarrow{DC}~;~\overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

2. **a.** $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D} \Rightarrow \left\|\overrightarrow{DC}\right\|^2 = DC^2 = \left\|\overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\Omega C} - \overrightarrow{\Omega D}\right) = \left\|\overrightarrow{\Omega C}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{\Omega D}\right\|^2 - 2\overrightarrow{\Omega C}\cdot\overrightarrow{\Omega D}$.

   Le rapport de la similitude étant de $\sqrt{2}$, on a $\Omega C = \Omega D\sqrt{2}$, et $\Omega C^2 = 2\Omega D^2$.

   D'où $DC^2 = 2\Omega D^2 + \Omega D^2 - 2 \times \Omega D \times \sqrt{2} \times \Omega D \times \cos\left(\overrightarrow{\Omega C}~;~\overrightarrow{\Omega D}\right) = 3\Omega D^2 - 2\sqrt{2} \times \Omega D^2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\Omega D^2 - 2\Omega D^2 = \Omega D^2$.

   b. La dernière égalité montre que DC = ΩD, c'est-à-dire que le triangle ΩCD est isocèle en D. Mais comme l'angle en Ω mesure $\dfrac{\pi}{4}$, l'angle en C mesure aussi $\dfrac{\pi}{4}$ et par supplément à π, l'angle en D mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

   Conclusion : le triangle ΩDC est un triangle rectangle isocèle en D.

3. **a.** σ composée de deux similitudes est une similitude dont le centre est Ω centre des deux similitudes, dont le rapport est égal aux produit des rapports des deux similitudes soit $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ et dont l'angle est égal à la somme des angles des deux similitudes soit $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$.

   b. On a $s(D) = C$ et $s(C) = B$ soit $s[s(D)] = B$ ou encore $s \circ s(D) = B$.

   Conclusion B est l'image de D par σ.

4. D'après les deux questions précédentes $\Omega B = 2\Omega D$ et $\left(\overrightarrow{\Omega D}~;~\overrightarrow{\Omega B}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

   Le quadrilatère ADΩB a dont trois angles droits : c'est un rectangle.

5. **a.** De façon évidente l'affixe du point Ω est $1 + 2i$.

   Puisque s est la similitude de centre Ω de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$, l'image d'un point M d'affixe z est le point M' d'affixe z' tel que :

   $z' - (1+2i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}[z - (1+2i)] \iff z' = 1 + 2i + \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)[z - (1+2i)] \iff$

   $z' = 1 + 2i + (1+i)[z - (1+2i)] \iff z' = 1 + 2i + z(1+i) - 1 - 2i - i + 2 \iff z' = z(1+i) + 2 - i$.

b. Avec $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, on a en remplaçant dans la définition complexe de la similitude :
$x' + \mathrm{i}y' = (x + \mathrm{i}y)(1 + \mathrm{i}) + 2 - \mathrm{i} \iff x' + \mathrm{i}y' = x - y + 2 + \mathrm{i}(x + y - 1)$
et en identifiant parties réelles et parties imaginaires :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x - y + 2 \\ y' & = & x + y - 1 \end{array}\right.$$

c. On a $\overrightarrow{\mathrm{A}M'}\,(x - y + 2\ ;\ x + y - 1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\,(1\ ;\ 3)$.
Donc $\overrightarrow{\mathrm{A}M'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AJ}} = 0 \iff x - y + 2 + 3(x + y - 1) = 0 \iff x - y + 2 + 3x + 3y - 3 = 0 \iff$
$4x + 2y - 1 = 0 \iff 4x + 2y = 1$.
Si x et y sont des entiers la relation trouvée signifie que x et y sont premiers entre eux, mais aussi que 4 et 2 sont premiers entre eux ce qui est manifestement faux.
On peut également dire simplement que $4x + 2y$ est pair : ce nombre ne peut donc être égal à 1 impair.
Conclusion : il n'existe pas de point M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M'} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AJ}} = 0$

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. La fonction est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
Or $f'(x) > 0 \iff 1 - \mathrm{e}^{-x} > 0 \iff 1 > \mathrm{e}^{-x} \iff$ (par croissance de la fonction ln) $0 > -x \iff x > 0$.
Conclusion : $f'(x) >$ sur $[0\ ;\ +\infty[$: la fonction est croissante sur cet intervalle.
2. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\lim x \to +\infty f(x) = +\infty$.
3. Soit d la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $d(x) = f(x) - x = \mathrm{e}^{-x}$.
On a vu que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ ce qui signifie que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ au voisinage de plus l'infini.

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1 + x} = \dfrac{1 + x - 1}{1 + x} = \dfrac{x}{1 + x}$.
Comme $x \geqslant 0$ et $1 + x \geqslant 1 > 0$, le quotient $g'(x)$ est positif ou nul : la fonction g est donc croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Comme $g(0) = 0$ on en déduit que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) \geqslant 0 \iff x - \ln(1 + x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \ln(1 + x) \iff \ln(1 + x) \leqslant x$.
2. En appliquant l'inégalité trouvée à $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \iff \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \iff \ln(n + 1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n} \iff \ln(n + 1) \leqslant \ln n + \frac{1}{n}$.
3. On a pour tout réel positif x, $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$ d'où avec $n \geqslant 1$,
$f(\ln n) = \ln n + \mathrm{e}^{-\ln n} = \ln n + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln n}} = \ln n + \dfrac{1}{n}$, car pour $n > 1$, $\mathrm{e}^{\ln n} = n$.
4. *Initialisation* $\ln 1 \leqslant u_1 = 0 + \mathrm{e}^{-0} = 1$ la relation est vraie au rang 1.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ tel que $\ln n \leqslant u_n$. Donc :
$f(\ln n) \leqslant f(u_n)$ car la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$. Mais d'après la question 3.

$f(\ln n) = \ln n + \dfrac{1}{n}$, donc $\ln n + \dfrac{1}{n} \leqslant f(u_n) \iff \ln n + \dfrac{1}{n} \leqslant u_{n+1}$.

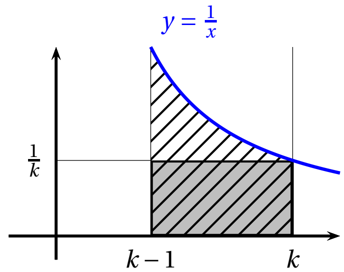
Mais d'après la question 2. : $\ln(n+1) \leqslant \ln n + \dfrac{1}{n}$, d'où finalement par transitivité :

$\ln(n+1) \leqslant u_{n+1}$.

La relation est vraie au rang 1, et si elle est vraie à un rang au moins égal à 1, elle l'est aussi au rang suivant : on a donc démontré par le principe de récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leqslant u_n$.

5. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, par comparaison : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La suite est divergente.

6. a. Un petit dessin vaut mieux qu'un long discours :



Le rectangle gris a une largeur de $\dfrac{1}{k}$ et une longueur de 1, donc une aire de $\dfrac{1}{k}$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ étant décroissante et positive, l'intégrale ci-dessus est égale à l'aire de la surface hachurée, d'où l'inégalité.

b. On a admis que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$.

On vient de démontrer que pour $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, donc l'inégalité précédente devient :

$u_n \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \cdots + \displaystyle\int_{n-2}^{n-1} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ ou d'après la linéarité de l'intégrale :

$u_n \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^{n-1} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ ou

$u_n \leqslant 1 + [\ln x]_1^{n-1}$ et finalement

$u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

7. On a pour $n \geqslant 1$ $\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n-1) \iff 1 \leqslant \dfrac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)}$.

Or, $\dfrac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)} = \dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{\ln(n-1)}{\ln n} = \dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{\ln[n(1-\frac{1}{n})]}{\ln n} = \dfrac{1}{\ln n} + \dfrac{\ln n + \ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n}$

Donc $\dfrac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)} = \dfrac{1}{\ln n} + 1 + \dfrac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n}$. Il reste à écrire les limites, mais plus de formes indéterminés ici.

On trouve $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)} = 1$.

Finalement, d'après le théorème des « gendarmes », $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2} = 1$.

Ceci signifie que pour n assez grand $u_n \approx \ln n$.