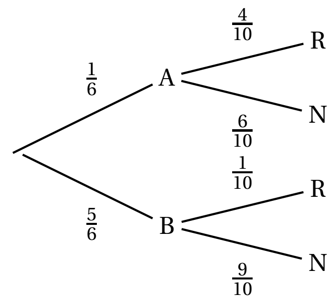
Corrigé du baccalauréat S Liban juin 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Partie A

1. On a l'arbre suivant :



On a donc $p(\text{R}) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{4}{10} + \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{4}{60} + \dfrac{5}{60} = \dfrac{9}{60} = \dfrac{3}{20} = \dfrac{15}{100} = 0,15$.

2. Il faut comparer $p_{\text{R}}(\text{A})$ et $p_{\text{R}}(\text{B})$.

$p_{\text{R}}(\text{A}) = \dfrac{p(\text{A} \cap \text{R})}{p(\text{R})} = \dfrac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{10}}{\frac{3}{20}} = \dfrac{4}{60} \times \dfrac{20}{3} = \dfrac{4}{9}$.

$p_{\text{R}}(\text{B}) = \dfrac{p(\text{B} \cap \text{R})}{p(\text{R})} = \dfrac{\frac{5}{6} \times \frac{1}{10}}{\frac{3}{20}} = \dfrac{\frac{5}{60}}{\frac{3}{20}} = \dfrac{5}{60} \times \dfrac{20}{3} = \dfrac{5}{9}$.

On a donc $p_{\text{R}}(\text{A}) < p_{\text{R}}(\text{B})$.

Partie B

1. La probabilité d'avoir deux boules rouges est égale à : $0,15^2 = 0,0225$.

La probabilité d'avoir une rouge et une noire est : $2 \times 0,15 \times (1 - 0,15) = 0,255$.

La probabilité d'avoir deux noires est : $0,85^2 = 0,7225$.

Le tableau de la loi de probabilité de G est donc;

G	$2x$	$x - 2$	-4
$p(\text{G}) = g_i$	0,0225	0,255	0,7225

2. $\text{E(G)} = 2x \times 0,0225 + 0,255(x - 2) + 0,7225 \times (-4) = 0,3x - 3,4$.

3. $\text{E(G)} \geqslant 0 \iff 0,,x - 3,4 \geqslant 0 \iff 0,3x \geqslant 3,4 \iff x \geqslant \dfrac{3,4}{0,3} \approx 11,333$.

Il faut donc que le gain soit au moins de 12 €(car $x \in \mathbb{N}$).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

Partie A

1. z^{100} a un argument égal à $\dfrac{100\pi}{3}$ ou encore $\dfrac{96\pi}{3} + \dfrac{4\pi}{3} = 32\pi + \dfrac{4\pi}{3} = 16 \times 32\pi + \dfrac{4\pi}{3}$ soit encore un argument de $\dfrac{4\pi}{3}$. Ce nombre n'est donc pas un réel.

Proposition 1 : « z^{100} est un nombre réel ». Faux

2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que $\left|\dfrac{z}{1-z}\right| = 1$.

$\left|\dfrac{z}{1-z}\right| = 1 \iff \dfrac{|z|}{|1-z|} = 1 \iff \text{O}M = \text{A}M$ si A est le point d'affixe 1. L'ensemble (E) est donc l'ensemble des points équidistants de O et de A : c'est la médiatrice de [OA] et comme les deux points appartiennent à l'axe des abscisses, cette médiatrice est parallèle à l'axe des ordonnées.

Proposition 2 : « l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels ». Faux

3. Si O′ est l'image de O par r, on a $z_{\text{O}'} - \left(1+\text{i}\sqrt{3}\right) = \text{e}^{-\frac{\pi}{2}}\left[z_{\text{O}} - \left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)\right] \iff$ $z_{\text{O}'} = 1+\text{i}\sqrt{3} - \text{i}\left(-1-\text{i}\sqrt{3}\right) = 1+\text{i}\sqrt{3}+\text{i}-\sqrt{3} = 1-\sqrt{3}+\text{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Proposition 3 : « l'image du point O par la rotation r a pour affixe $\left(1-\sqrt{3}\right)+\text{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$ ». Vrai

4. $z^2 + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0 \iff \left[z+\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\right]^2 - \cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + 1 = 0 \iff$ $\left[z+\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\right]^2 + \sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = 0 \iff \left[z+\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\right]^2 = \text{i}^2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Cette équation a deux solutions : $-\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)+\text{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $-\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)-\text{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ qui ont toutes deux un module égale à 1.

Proposition 4 : « l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ». Vrai

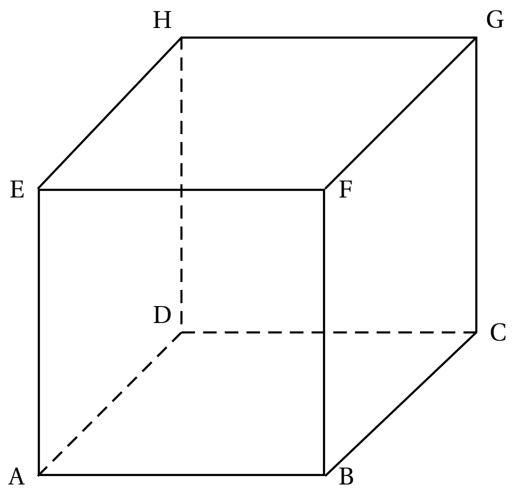
Partie B

En prenant comme repère orthonormal $\left(\text{D}~;~\overrightarrow{\text{DA}},~\overrightarrow{\text{DC}},~\overrightarrow{\text{DH}}\right)$, on a A(1 ; 0 , 0),

G(0 ; 1 ; 1), donc $\overrightarrow{\text{AG}}(-1~;~1~;~1)$;
$\overrightarrow{\text{DB}}(1~;~1~;~0)$ et $\overrightarrow{\text{DE}}(1~;~0~;~1)$.
Or $\overrightarrow{\text{AG}}\cdot\overrightarrow{\text{DB}} == -1+1+0 = 0$ et $\overrightarrow{\text{AG}}\cdot\overrightarrow{\text{DE}} == -1+0+1 = 0$.
Le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE) : il est donc normal à ce plan.

Proposition 5 : « le vecteur $\overrightarrow{\text{AG}}$ est normal au plan (BDE) ». Vrai.

Proposition 6 : « les droites (EB) et (ED) sont perpendiculaires ». Faux
On peut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{EB}}\cdot\overrightarrow{\text{ED}}$ et montrer qu'il n'est pas nul (en fait égal à 1.
Le plus simple est de dire que [EB], [ED] et [BD] sont des diagonales de carrés de même côté : le triangle EBD est équilatéral et les droites (EB) et (ED) ne sont pas perpendiculaires.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. On vérifie que le point Ω d'affixe $-2-2\text{i}$ est invariant par cette transformation. On a donc : $\begin{cases} z' &= \frac{3}{2}(1-\text{i})z+4-2\text{i} \\ -2-2\text{i} &= \frac{3}{2}(1-\text{i})(-2-2\text{i})+4-2\text{i}\end{cases}$ d'où par différence $z'-(-2-2\text{i}) = \frac{3}{2}(1-\text{i})[z-(-2-2\text{i})]$.
   Or $1-\text{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$.
   Donc $z'-(-2-2\text{i}) = \frac{3}{2}\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}[z-(-2-2\text{i})]$.
   On voit que l'image est obtenue en composant (dans n'importe quel ordre) l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2-2\text{i}$ avec la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
   Proposition 1 : « $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2-2\text{i}$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ». Vrai
2. Pour $n = 1$, $5^7 + 2^4 = 78\,141$ qui n'est pas multiple de 5.
   Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ». Fausse
   On a $5^6 = 15\,625 \equiv 1 \quad [7]$, donc $5^{6n} \equiv 1 \quad [7]$ et $5^{6n} \times 5 \equiv 5 \quad [7]$. $2^3 \equiv 1 \quad [7]$, donc $2^{3n} \equiv 1 \quad [7]$ et $2^{3n} \times 2 \equiv 2 \quad [7]$. D'où en ajoutant :
   $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 5+2 \quad [7]$ ou encore $5^{6n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0 \quad [7]$.
   Proposition 3 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ». Vrai
3. On a $11 \times 14 - 5 \times 28 = 14$, donc le point de coordonnées $(14\,;\,28)$ est un point solution. Par différence avec l'équation à résoudre, on obtient :
   $11(x-14)-5(y-28) = 0 \iff 11(x-14) = 5(y-28)$. Comme 5 divise $11(x-14)$ et est premier avec 11, il divise $(x-14)$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x-14 = 5k \iff x = 5k+14$ et en remplaçant dans l'équation initiale $y = 11k+28$.
4. La section a pour équation $x = \lambda$ et $z = y^2 + \lambda$ qui est l'équation d'une parabole.
   Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole ». Faux
   Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ». Vrai
   On a $S(k) = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{k}\right)^2 = \pi k$.
   $V_1 = \displaystyle\int_0^{9\frac{\sqrt{2}}{2}} \pi k\,\text{d}k = \left[\frac{\pi k^2}{2}\right]_0^{9\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{81\pi}{4}$.
   De même $V_2 = \displaystyle\int_{9\frac{\sqrt{2}}{2}}^{9} \pi k\,\text{d}k = \left[\frac{\pi k^2}{2}\right]_{9\frac{\sqrt{2}}{2}}^{9} = \frac{81\pi}{2} - \frac{81\pi}{4} = \frac{81\pi}{4}$.

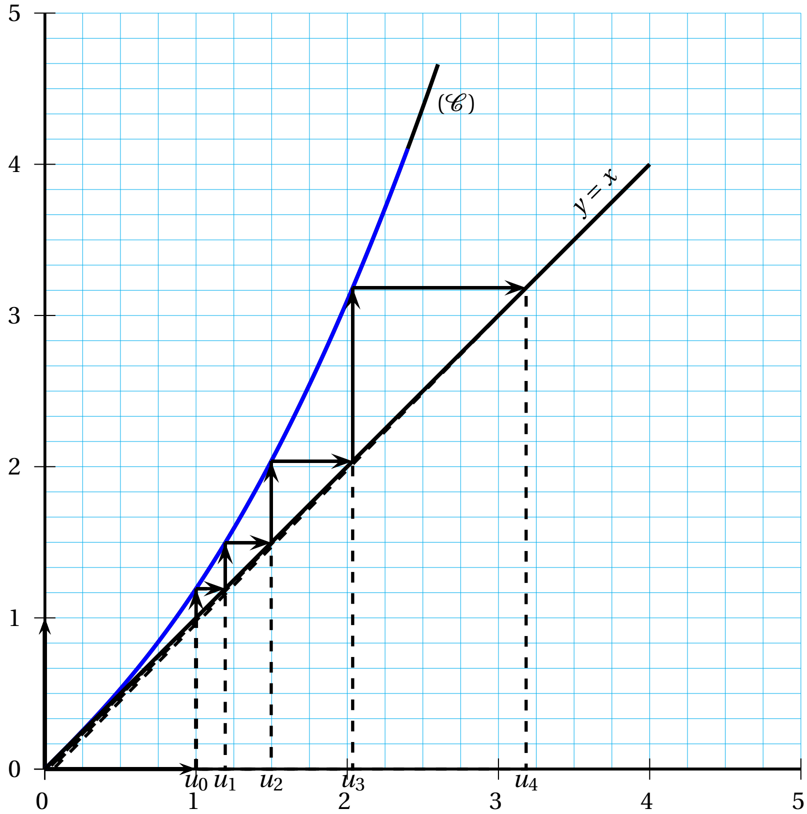
Exercice 3 — 6 points

Partie B

1. La fonction f est dérivable comme somme de fonctions composées de fonctions dérivables sur $[0~;~+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} + x \geqslant 1 > 0$.
La fonction f est donc croissante sur $[0~;~+\infty[$.
2. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y - 0 = 1(x-0) \iff y = x$.
3. Cf. dessin

Partie C

1. En se servant de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite d'équation $y = x$, on obtient à partir de $u_0 = 1$:



2. Ce cheminement suggère que la suite est croissante et qu'elle n'est pas bornée.
3. **a.** Soit la proposition $P_n : u_n \geqslant 1$.
Initialisation : on a $u_0 = 1 \geqslant 1$: vraie.
Hérédité : soit un naturel p tel que $u_p \geqslant 1$; la fonction f est croissante donc $f\left(u_p\right) \geqslant f(1) \iff u_{p+1} \geqslant 1$, car $f(1) = \ln(1+1) + \dfrac{1}{2} \approx 0,69 + 0,5 > 1$.
Conclusion : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

   b. On démontre de même par récurrence que la suite (u_n) est croissante, car $u_p \leqslant u_{p+1} \Rightarrow f\left(u_p\right) \leqslant f\left(u_{p+1}\right) \iff u_{p+1} \leqslant u_{p+2}$ par croissance de la fonction f sur $[1~;~+\infty[$, car d'après la question précédente tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle.

c. Supposons que (u_n) soit majorée ; majorée, croissante elle a pour limite un réel ℓ.

De l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on en déduit par limite à l'infini et par continuité de la fonction f :

$$\ell = f(\ell)$$

avec $\ell \geqslant 1$, puisque $u_n \geqslant 1$. Or il est admis que, pour tout $x > 0$, $f(x) > x$ ce qui contredit l'égalité $f(\ell) = \ell$.

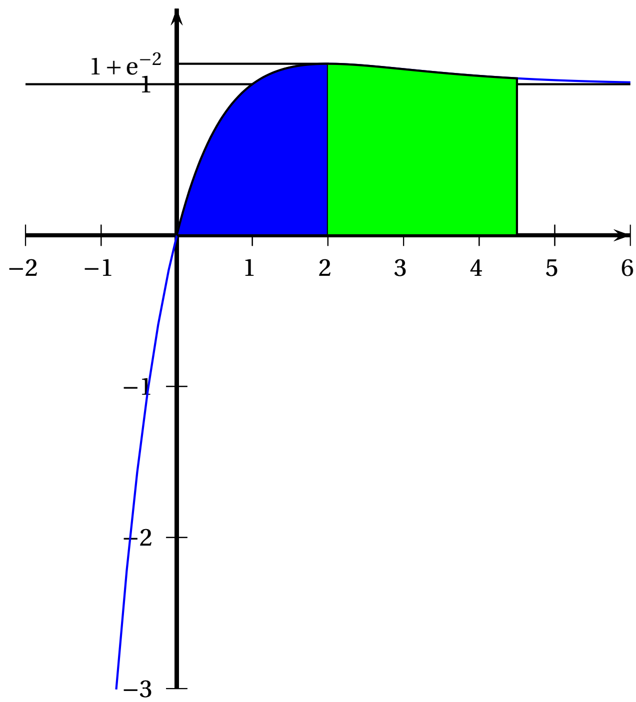
Conclusion : l'hypothèse de départ est fausse : la suite n'est pas majorée.

d. La suite est croissante et non majorée : elle diverge en $+\infty$.

Exercice 4 **5 points**

Partie A

1.



2. a. $g(2)$ représente en unités d'aire la mesure de la surface colorée en bleu.

b. L'aire (positive par définition) est manifestement inférieure à celle du rectangle de côtés 2 et $1+\mathrm{e}^{-2}$ soit $2\left(1+\mathrm{e}^{-2}\right) \approx 2{,}271 < 2{,}5$.

3. a. On sait d'après le tableau des variations de f que pour $x \geqslant 2, f(x) > 1$.

En intégrant sur l'intervalle $[2~;~x]$, on obtient $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_2^x 1\,\mathrm{d}t$, soit $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$.

D'après la relation de Chasles $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t =$

$\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - g(2)$.

Donc $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = g(x) = \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t + g(2) \geqslant x - 2 + g(2) \geqslant x - 2$.

b. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (x-2) = +\infty$, par comparaison : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g(x) = +\infty$

4. On sait que par définition $g'(x) = f(x)$.
La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. On pose :

$$\left\{\begin{array}{ll} u(t) = t-1 & v'(t) = \mathrm{e}^{-t} \\ u'(t) = 1 & v(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

Toutes ces fonctions étant dérivables donc continues, on peut intégrer par parties et
$\displaystyle\int_0^x \left[(t-1)\mathrm{e}^{-t}\right]\,\mathrm{d}t = \left[-(t-1)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[(-t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = -x\mathrm{e}^{-x}$.

2. On a $g(x) = \displaystyle\int_0^x \left[(t-1)\mathrm{e}^{-t}\right]\,\mathrm{d}t + \int_0^x 1\mathrm{d}t = -x\mathrm{e}^{-x} + x = x\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

3. Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x} = -\infty$
De plus, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, on obtient par produit :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.$$