Durée : 4 heures

Baccalauréat S La Réunion 22 juin 2010

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f.
   b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - x.$$

   a. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -1} g(x)$.
   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$.
   c. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.
   d. Montrer que sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\,;\,3]$.
   e. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 &=& 2 \\ u_{n+1} &=& f(u_n) \end{array}\right.$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.
2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie I

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
2. Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $\dfrac{7}{18}$.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires.
Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;
- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1. **a.** Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\dfrac{4}{9}$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.
Partie A

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, vérifiant la condition (E) :

$$\text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif, } xf'(x) - f(x) = x^2\mathrm{e}^{2x}.$$

1. Montrer que si une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ vérifie :
$$\text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif, } g'(x) = \mathrm{e}^{2x}.$$
2. En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ qui vérifient la condition (E).
3. Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$?

Partie B

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$h(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \frac{\mathrm{e}}{2}x.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x, le signe de $h(x)$.
2. **a.** Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x$.

   b. En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie I : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $a,\ b,\ c$.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.

Montrer que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe $1+\mathrm{i}$.
On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M' d'affixe

$$z' = \frac{z-1-\mathrm{i}}{z}.$$

Le point M' est appelé le point image du point M.

1. **a.** Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B$'$, image du point B d'affixe i.

   b. Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $\left|z'\right| = 1$.
3. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Partie 1 : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

Prérequis :

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme $z' = \alpha z + \beta$, où α est un nombre complexe non nul et β est un nombre complexe.
Soient A, B, C, D quatre points du plan ; on suppose d'une part que les points A et C sont distincts et d'autre part que les points B et D sont distincts.
Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $s(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$.

Partie II

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right)$;
$\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
On considère le point C tel que ABCD est un carré.
Soit E le milieu du segment [AD], on considère le carré EDGF tel que
$\left(\overrightarrow{\text{ED}},\ \overrightarrow{\text{EF}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

1. **a.** Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D, E, F, G. On complètera la figure au cours de l'exercice.

   b. Préciser les nombres complexes $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$, affixes respectives des points A, B, C, D, E, F et G.

   c. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s du plan telle que
   $s(\text{D}) = \text{F}$ et $s(\text{B}) = \text{D}$.

2. On se propose de préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe s.

   a. Déterminer le rapport k et l'angle θ de la similitude directe s.

   b. Donner l'écriture complexe de cette similitude.

   c. Déterminer, le centre Ω de la similitude directe s.