

Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S La Réunion 23 juin 2009

EXERCICE 1

4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $z = 1 - 2i + e^{i\theta}$, θ étant un nombre réel.

$$z = 1 - 2i + e^{i\theta}, \Rightarrow |z - (1 - 2i)| = |e^{i\theta}| \text{ soit } |z - (1 - 2i)| = 1.$$

Conclusion : les points M d'affixe z sont à la distance 1 du point d'affixe $1 - 2i$.
Comme $\theta \in \mathbb{R}$, la réponse est **c**.

2. Soit f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -iz - 2i$.

Un point M d'affixe z est invariant par f si et seulement si : $z = -iz - 2i \iff$

$$z(1+i) = -2i \iff z = \frac{-2i}{1+i} = -1-i.$$

Il y a donc un point invariant par f .

$$\begin{cases} z' &= -iz - 2i \\ -1-i &= -i(-1-i) - 2i \end{cases} \text{ entraîne par différence :}$$

$z' - (-1-i) = -i[z - (-1-i)]$. f est donc la rotation de centre le point d'affixe $-1-i$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Réponse **d**.

3. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-1+i| = |z+1+2i|$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives $1-i$, $-1+2i$ et $-1-2i$.

$|z-1+i| = |z+1+2i|$ peut s'écrire $|z-(1-i)| = |z-(1-2i)|$ qui montre que M est équidistant des deux points A et C; donc M appartient à la médiatrice de [AC]. Réponse **c**.

4. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$z + |z|^2 = 7 + i$. En posant $z = x + iy$, l'équation proposée s'écrit :

$x + iy + x^2 + y^2 = 7 + i$, soit en identifiant parties réelles et parties imaginaires :

$$\begin{cases} x + x^2 + y^2 &= 7 \\ y &= 1 \end{cases}$$

La partie imaginaire de(s) la solution(s) est égale à 1.

La première équation s'écrit :

$$x + x^2 + y^2 = 7 \iff x^2 + 1 + x = 7 \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff (x-2)(x+3) = 0 \iff x = 2 \text{ ou } x = -3.$$

Vérification : avec $z_1 = 2 + i$, $2 + i + 4 + 1 = 7 + i$: ce nombre est solution.

Avec $z_1 = -3 + i$, $-3 + i + 9 + 1 = 7 + i$: ce nombre est solution. Réponse **a**.

EXERCICE 2

6 points

Partie A

1. La fonction semble être croissante sur $[0; 1]$, puis décroissante sur $[1; +\infty[$.
La limite en $+\infty$ semble être nulle.
2. f produit de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$.
Comme $e^{-x} > 0$, quel que soit x , le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1-x$.
On a donc $f'(1) = 0$, $f'(x) > 0$ si $x \in]0; 1[$, $f'(x) < 0$ si $x > 1$.
D'autre part $f(x) = \frac{x}{e^x}$. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

3. Voir l'annexe

4. \mathcal{C}_f semble être au dessus de \mathcal{C}_g sur $]0; 1[$, puis au dessous sur $]1; +\infty[$.

Démonstration : considérons la fonction d définie sur $]0; +\infty[$ par $d(x) = xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(1 - x)$. Comme $x \geq 0$ et $e^{-x} > 0$, le signe de d est celui de $1 - x$.

Conclusion : $d(x) > 0$ si $0 < x < 1$, c'est-à-dire $f(x) > g(x)$;

$d(x) < 0$ si $x > 1$, c'est-à-dire $f(x) < g(x)$.

Partie B

1. Voir l'annexe

2. $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xe^{-x} dx.$

On fait une intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u(x) &= x \\ dv(x) &= e^{-x} \end{cases} \quad \begin{cases} du(x) &= 1 \\ v(x) &= -e^{-x} \end{cases}$$

Toutes ces fonctions étant continues, on a donc :

$$I = [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1 = [-e^{-x}(x+1)]_0^1 = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

3. a. H produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :

$$H'(x) = (-2x - 2)e^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x} = e^{-x}(x^2 + 2x - 2x - 2) = e^{-x}(x^2 - 2).$$

b. On peut écrire $H'(x) = x^2e^{-x} - 2e^{-x} = g(x) - 2e^{-x}$ ou encore

$$g(x) = H'(x) + 2e^{-x}.$$

Une primitive de $H'(x)$ est $H(x)$, une primitive de $2e^{-x}$ est $-2e^{-x}$, donc par linéarité une primitive de g est

$$G(x) = -(x^2 + 2x)e^{-x} - 2e^{-x} = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2).$$

4. On a vu que sur $]0; 1[$ \mathcal{C}_f est au dessus de \mathcal{C}_g . L'aire \mathcal{A} est donc l'intégrale de la fonction positive d sur $]0; 1[$.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx \text{ (par linéarité de l'intégrale).}$$

$$\text{Or } \int_0^1 f(x) dx = I = 1 - \frac{2}{e};$$

$$\int_0^1 g(x) dx = G(1) - G(0) = -\frac{5}{e} + 2.$$

$$\text{Donc } \mathcal{A} = 1 - \frac{2}{e} + \frac{5}{e} - 2 = \frac{3}{e} - 1.$$

Remarque : $\mathcal{A} = \frac{3}{e} - 1 \approx 0,1$ ce qui correspond à peu près à ce que l'on lit sur la figure.

EXERCICE 3

5 points

1. a. Comme A et B sont indépendants, $p(C) = p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

$$p(C) = 0,02 \times 0,01 = 0,0002$$

b. On a $p(D) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,02 + 0,01 - 0,0002 = 0,0298.$

c. On a $E = \overline{D}$ d'où $p(E) = 1 - p(D) = 1 - 0,0298 = 0,9702.$

d. On a $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0,0002}{0,02} = 0,01.$ (en fait $\frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A) \times p(B)}{p(A)} = p(B)$).

2. a. On a manifestement une épreuve de Bernoulli avec deux issues (sac sans défaut, sac défectueux).

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,03$.

- b. On sait que la probabilité que k , $0 \leq k \leq 100$ sacs soient défectueux est :

$$p(X = k) = \binom{100}{k} 0,03^k (1 - 0,03)^{100-k}$$

L'évènement contraire de l'évènement « au moins un sac est défectueux » est « il n'y a pas de sac défectueux qui a une probabilité de

$$\binom{100}{0} 0,03^0 \times 0,97^{100} = 0,97^{100} \approx 0,0476.$$

La probabilité d'avoir au moins un sac défectueux est donc égale à $1 - 0,97^{100} \approx 0,952 \approx 0,95$ (au centième près).

Interprétation : pour 100 sacs prélevés il y a à peu près 95 chances sur 100 d'avoir au moins un sac défectueux.

- c. Pour cette loi binomiale on a $E = n \times p = 100 \times 0,03 = 3$.

Interprétation : sur 100 sacs prélevés il y a en moyenne 3 sacs défectueux.

EXERCICE 4

5 points

1. $\vec{BC}(-1; 1; 0)$ est un vecteur normal au plan (P); celui-ci a donc une équation de la forme $-x + y + d = 0$.

Comme $A \in (P)$ les coordonnées de A vérifient l'équation ci-dessus, soit $-1 + 2 + d = 0 \iff d = -1$.

Conclusion $M(x; y; z) \in (P) \iff -x + y - 1 = 0 \iff x - y + 1 = 0$.

On admet que le plan (Q) a pour équation cartésienne $-y + z + 2 = 0$ et que le plan (R) a pour équation cartésienne $-x + z + 1 = 0$.

$$2. \text{ a. } \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -y + z + 2 = 0 \\ -x + z + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -y + z + 2 = 0 \\ -y + z + 2 = 0 \end{cases} \text{ en ajoutant}$$

$$\text{l'équation 1 et l'équation 3} \iff \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

En posant $z = t$, $t \in \mathbb{R}$ la deuxième équation donne $y = t + 2$ et enfin la première $x = y - 1 = t + 2 - 1 = t + 1$.

- b. Conclusion du calcul précédent : l'ensemble des points appartenant à (P), (Q) et (R) est une droite (d) d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- c. On a déjà $\vec{BC}(-1; 1; 0)$ et $\vec{BD}(-1; 0; 1)$. Ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires.

La droite (d) a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}(1; 1; 1)$.

On a $\vec{u} \cdot \vec{BC} = -1 + 1 + 0 = 0$, donc \vec{u} et \vec{BC} sont orthogonaux.

De même $\vec{u} \cdot \vec{BD} = -1 + 0 + 1 = 0$, donc \vec{u} et \vec{BD} sont orthogonaux.

Conclusion : le vecteur \vec{u} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD), donc la droite (d) est orthogonale à ce plan.

Comme précédemment on en déduit qu'une équation du plan (BCD) est de la forme $x + y + z + d' = 0$.

$$\text{Or } B \in (\text{BCD}) \iff 2+2+0 = d' = 0 \iff d' = -4.$$

Conclusion : une équation du plan (BCD) est :

$$M(x; y; z) \in (\text{BCD}) \iff x + y + z - 4 = 0.$$

3. Les trois points A, B et C ont une cote nulle : une équation du plan (ABC) est donc $z = 0$;

Les trois points A, B et D ont une ordonnée égale à 2 : une équation du plan (ABD) est donc $y = 2$;

Les trois points A, C et D ont une abscisse égale à 1 : une équation du plan (ACD) est donc $x = 1$;

On admet que ces plans sont respectivement parallèles aux plans de repères (O, \vec{i}, \vec{j}) , (O, \vec{i}, \vec{k}) et (O, \vec{j}, \vec{k}) .

4. a. Soit $M(t+1; t+2; t)$ un point quelconque de (d).

$$\begin{aligned} \bullet d(M, (\text{ABC})) &= \frac{|t|}{\sqrt{1^2}} = |t|; \\ \bullet d(M, (\text{ABD})) &= \frac{|t+2-2|}{\sqrt{1^2}} = |t|; \\ \bullet d(M, (\text{ACD})) &= \frac{|t+1-1|}{\sqrt{1^2}} = |t|; \end{aligned}$$

Conclusion : tout point de la droite (d) est équidistant des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

- b. D'après la question précédente, les points de (d) sont équidistants de (ABC), (ABD) et (ACD). Cherchons si ces points sont à la même distance du plan (BCD).

$$\text{Une équation du plan (BCD) étant } x + y + z - 4 = 0, \text{ on a } d(M, (\text{BCD})) = \frac{|t+1+t+2+t-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|3t-1|}{\sqrt{3}}.$$

Un point de (d) est donc équidistant de (ABC) et de (BCD) (et donc de (ABD) et (ACD)) si et seulement si :

$$|t| = \frac{|3t-1|}{\sqrt{3}} \Rightarrow t^2 = \frac{(3t-1)^2}{3} \iff 3t^2 = 9t^2 + 1 - 6t \iff 6t^2 - 6t + 1 = 0$$

Cette équation du deuxième degré a un discriminant égal à $36 - 24 = 12 > 0$. Elle a donc deux solutions.

Il existe donc deux points de la droite (d) équidistants des trois plans (ABD), (ACD) et (BCD), mais il peut en exister d'autres.

EXERCICE 4

5 points

1. On a $d(M, P) = \frac{|z + \frac{1}{4}|}{\sqrt{1^2}} = |z + \frac{1}{4}|.$

$$\text{Or } d(M, P) = MF \iff d^2(M, P) = MF^2 \iff (z + \frac{1}{4})^2 = x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{4})^2 \iff x^2 + y^2 - z^2 - \frac{z}{2} - \frac{1}{16} + z^2 + \frac{1}{16} - \frac{z}{2} = 0 \iff x^2 + y^2 = z.$$

$$\text{Conclusion : } M(x; y; z) \in (S) \iff x^2 + y^2 = z.$$

2. a. Il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

On reconnaît l'équation d'un cercle centré en $(0; 0; 2)$, de rayon $\sqrt{2}$ et situé dans le plan horizontal d'équation $z = 2$.

b. On résout de même le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = z \\ x = 0 \end{cases}$$

On reconnaît l'équation d'une parabole contenant l'origine située dans le plan vertical dont une équation est $x = 0$.

3. Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

a. On a successivement :

- $x \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{7}$
- $x \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{7}$
- $x \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod{7}$
- $x \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow x^2 \equiv 2 \pmod{7}$
- $x \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow x^2 \equiv 2 \pmod{7}$
- $x \equiv 5 \pmod{7} \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod{7}$
- $x \equiv 6 \pmod{7} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{7}$

Les restes dans la division euclidienne de x^2 par 7 peuvent être : 0, 1, 2 ou 4.

b. D'après la question 1. :

$$x^2 \equiv \alpha \pmod{7}$$

$$y^2 \equiv \beta \pmod{7},$$

avec α et β appartenant à l'ensemble $\{0 ; 1 ; 2 ; 4\}$.

Il en résulte que $x^2 + y^2 \equiv \alpha + \beta \pmod{7}$, les valeurs possibles pour $\alpha + \beta$ étant 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 8.

Conclusion 7 divise $x^2 + y^2$ si et seulement si $\alpha + \beta = 0$, ce qui n'est possible que si $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, c'est-à-dire si 7 divise x et y .

Comme dans les questions précédentes, il s'agit de trouver dans le plan horizontal $z = 98$ des points dont les coordonnées vérifient $x^2 + y^2 = 98$.

Comme $98 = 70 + 28 = 7 \times 10 + 7 \times 4 = 7 \times 14$, $x^2 + y^2$ est donc divisible par 7 et d'après la question précédente ceci n'est possible que si x et y sont divisibles par 7.

D'autre part l'équation $x^2 + y^2 = 98$ entraîne que $0 \leq x \leq 9$ et $0 \leq y \leq 9$.

Le seul multiple de 7 dans cet intervalle est 7.

Il y a donc un seul point solution :

$$M_1(7 ; 7 ; 98)$$

4. ANNEXE Exercice 2

À rendre avec la copie

