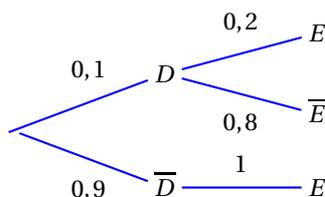


❧ Corrigé du baccalauréat S Asie 18 juin 2008 ❧

EXERCICE 1

5 points

1. a. On a la loi binomiale $X \leftrightarrow \mathcal{B}(8; 0,1)$, de paramètres $n = 8$ et $p = 0,1$.
- b. $p(A) = p(X = 0) = \binom{8}{0} \times 0,1^0 \times 0,9^8 \approx 0,430 \approx 0,43$, à 10^{-2} près.
 $p(B) = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - p(A) \approx 0,57$, à 10^{-2} près.
 $p(C) = p(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0,1 \times 0,9^6 \approx 0,148 \approx 0,15$, à 10^{-2} près.
2. a. On a l'arbre de probabilités suivant :



- b. En utilisant les branches conduisant à E et en utilisant la formule des probabilités totales :
 $p(E) = p(D) \times p_D(E) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(E) = 0,1 \times 0,2 + 0,8 \times 1 = 0,92$.
- c. $p_E(D) = \frac{p(E \cap D)}{p(E)} = \frac{0,02}{0,92} = \frac{1}{46} \approx 0,0217 \approx 0,022$, à 10^{-3} près.
3. On a à nouveau une épreuve binomiale de paramètre $n = 8$ et $p = 1 - 0,022 = 0,978$. La probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos est :
 $\binom{8}{0} (0,978)^8 \times 0,022^1 \approx 0,84$ à 10^{-2} près.
 Conclusion : ce contrôle permet de presque doubler les chances d'avoir un lot de huit stylos sans défaut.

EXERCICE 2

5 points

Partie A

1. Le tableau de variations permet d'énoncer que la fonction f est définie sur $]0; +\infty[$, croissante sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$, décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$ avec un extremum (maximum) en $e^{\frac{1}{2}}$ égal à $\frac{1}{2e}$.

Les démonstrations :

— Variations.

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme fonction de fonctions dérivables le dénominateur ne s'annulant pas. Sur cet intervalle on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

Comme $x^3 > 0$, le signe de cette dérivée est celui de $1 - 2 \ln(x)$. On a

$$1 - 2 \ln(x) > 0 \iff \ln(x) < \frac{1}{2} \iff x < e^{\frac{1}{2}}. \text{ De même :}$$

$$1 - 2 \ln(x) < 0 \iff \ln(x) > \frac{1}{2} \iff x > e^{\frac{1}{2}}.$$

Donc la fonction f est croissante sur $]0; e^{\frac{1}{2}}]$ et décroissante sur $[e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$.

$$f \text{ a donc un maximum en } e^{\frac{1}{2}} \text{ et } f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{1}{2e}.$$

— Limites.

Limite en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Limite en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (par croissance comparée).

2. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc son graphe a une tangente en chacun de ses points $M(X; Y)$.

On a $M(X; Y) \in (T) \iff Y - f(x) = f'(x)(X - x) \iff Y - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}(X - x)$
 $\iff Y = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}(X - x)$.

Donc $X = 0$ entraîne $Y = \frac{-1 + 2 \ln x}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{-1 + 3 \ln x}{x^2}$.

Donc $Y = 0 \iff -1 + 3 \ln x = 0 \iff \ln x = \frac{1}{3} \iff x = e^{\frac{1}{3}}$.

Il existe donc une tangente à \mathcal{C} contenant O : c'est la tangente au point d'abscisse $x = e^{\frac{1}{3}}$ et l'équation de cette tangente est :

$$Y = \frac{1}{3e}X.$$

Partie B

1. a. g est définie par $g(x) = \int_1^x f(t) dt$, alors c'est la primitive de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 : f est donc la dérivée de g sur $]0; +\infty[$.

- b. Il en résulte que le signe de $g'(x)$ est celui de $f(x)$ ou encore celui de $\ln(x)$ puisque $x^2 > 0$.

La fonction g est décroissante sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$.

$g(1) = 0$ est donc le minimum de g sur $]0; +\infty[$.

2. La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[1; 3]$, alors $g(3) = \int_1^3 f(t) dt$ est donc égale à l'aire, en unités d'aire, de la surface limitée par (\mathcal{C}), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

De même $g\left(\frac{1}{2}\right) = \int_1^{\frac{1}{2}} f(t) dt = -\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (-f(t)) dt$. On a vu que sur l'intervalle d'intégration la fonction f est négative donc $-f$ est positive et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ est égale à l'aire, en unités d'aire, de la surface limitée par (\mathcal{C}), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 1$.

3. a. On pose :

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{cases}$$

Toutes ces fonctions sont dérivables, donc continues : on peut donc intégrer par parties et

$$g(x) = \left[-\frac{\ln(t)}{t} \right]_1^x + \int_1^x \left(\frac{1}{t^2} \right) dt = \left[-\frac{\ln t + 1}{t} \right]_1^x = -\frac{\ln x + 1}{x} + \frac{\ln 1 + 1}{1} = 1 - \frac{\ln x + 1}{x}.$$

- b. On a $g(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$. La limite des deux derniers termes est clairement nulle, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

EXERCICE 3

5 points

1. a. $u_1 = \left(1 + \frac{2}{1}\right)u_0 + \frac{6}{1} = 3 \times 5 + 6 = 21$.
- b. On obtient : $d_1 = u_1 - u_0 = 16$, $d_2 = u_2 - u_1 = 24$, puis $d_3 = 32$, $d_4 = 40$, $d_5 = 48$.
On peut donc conjecturer que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 8 et de premier terme 16.
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
On sait que, pour tout entier naturel n , $v_n = 16 + 8n = 8(n+2)$.
La somme S_n des n premiers termes est : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = n \times v_0 + 8 \times 2 \times 8 + \dots + (n-1) \times 8 = 16n + 8 \times \frac{n(n-1)}{2} = 16n + 4n(n-1) = 4n^2 + 12n$.
3. Démonstration par récurrence :
- *Initialisation* : $u_0 = 5$: la relation est vraie au rang 0.
 - *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
Alors $u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)u_n + \frac{6}{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)(4n^2 + 12n + 5) + \frac{6}{n+1}$.
Or $4n^2 + 12n + 5 = 4(n+1)^2 - 8n - 4 + 12n + 5 = 4(n+1)^2 + 4n + 1 = 4(n+1)^2 + 4(n+1) - 3$. En reportant dans u_{n+1} au dessus, on obtient :
$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)[4(n+1)^2 + 4(n+1) - 3] + \frac{6}{n+1} =$$
$$4(n+1)^2 + 4(n+1) - 3 + 8(n+1) + 8 - \frac{6}{n+1} + \frac{6}{n+1} = 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5.$$

La relation est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$: on vient de démontrer par récurrence que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après les questions précédentes, on déduit que : $d_n = u_{n+1} - u_n = 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5 - (4n^2 + 12n + 5) = 4n^2 + 8n + 4 + 12n + 12 - 4n^2 - 12n - 5 = 8n + 16 = v_n$.
Conclusion : la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 8 et de premier terme $d_0 = 16$.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Par définition de l'expression complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$:
- $$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z.$$
- Donc, en particulier : $z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1$
De même : $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\pi} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \overline{z_A}$
Donc A et C sont symétriques autour de l'axe des réels.
2. a. $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$, donc : $OA = OB = OC = 1$. Les trois points A, B et C sont à la distance 1 du point O : ils appartiennent au cercle de centre O (\mathcal{C}) circonscrit au triangle ABC.
Construction : on dessine le cercle (\mathcal{C}) et le cercle de centre le point d'affixe 1 et de rayon 1 ; ces deux cercles sont sécants en A et C, le point A étant celui qui a une ordonnée positive. B est le point d'intersection de (\mathcal{C}) avec le demi-axe contenant les points d'affixes négatives.
- b. On a $z_A + z_B + z_C = 0$, autrement dit O est l'isobarycentre des points A, B et C, donc le centre de gravité du triangle (ABC). Ce triangle est isocèle en B. De plus
- $$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{e^{i\frac{5\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}}{-1 - e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}} \times (e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1)}{e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$
- Le module de ce complexe est égal à 1, donc $AB = AC$ et en conclusion le triangle (ABC) est équilatéral.

3. a. Cf. figure.
 b. Le triangle PQR homothétique de ABC est semblable à ce triangle, donc lui aussi équilatéral.

4. a. L'écriture complexe de h est :

$$z' = -2z.$$

- b. $z_A + z_B + z_C = 0$ est l'affixe du vecteur $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

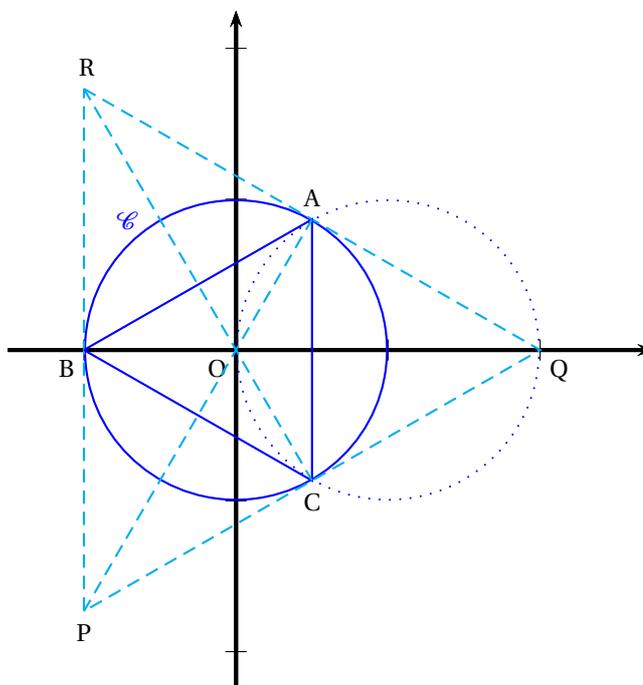
O est le centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC, il en est aussi le centre de gravité (isobarycentre des points A, B et C), alors $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$.

Par conséquent : $z_A + z_B + z_C = 0 \iff z_A = -z_B - z_C \iff z_A = \frac{1}{2}(-2z_B - 2z_C) = \frac{1}{2}(z_Q + z_R)$.

Cette égalité signifie que A est le milieu du segment [QR].

- c. Par définition de l'homothétie P, O et A sont alignés. La droite (PA) médiane du triangle équilatéral (PQR) est aussi hauteur; donc (OA) est perpendiculaire à la droite (QR).

Conclusion : cette droite (QR) est la tangente en A au cercle \mathcal{C} .



EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a. L'écriture complexe de s_1 est $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Les deux points A et B sont invariants par s_1 ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} 2+i = a(2-i) + b \\ 5+2i = a(5-2i) + b \end{cases} \Rightarrow (\text{par différence}) \quad 3+i = a(3-i) \iff a = \frac{3+i}{3-i} \iff$$

$$a = \frac{(3+i)^2}{(3+i)(3-i)} = \frac{8+6i}{10} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

En reportant dans la première équation : $b = 2+i - (2-i)\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right) =$

$$2+i - \frac{8}{5} - \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i + \frac{4}{5}i = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$$

b. On a $z_{C'} = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right) \times (-i) + -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$.

c. Soit $M(x; y)$ un point du plan avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. On a $z = x + iy$ et $z' = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)(x - iy) - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$.

Ce nombre est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle soit

$$\frac{4}{5}x - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}y = 0 \iff 4x - 1 + 3y = 0 \iff 4x + 3y = 1.$$

L'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est donc la droite (\mathcal{D}) d'équation $4x + 3y = 1$.

d. $C' \left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right) \in \mathcal{D} \iff 4 \times \left(\frac{2}{5}\right) + 3 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = 1 \iff \frac{8-3}{5} = 1$ qui est vraie.

Le point C' appartient donc à la droite (\mathcal{D}) .

2. a. Équation cartésienne de la droite (AB) : $M(x; y) \in (AB) \iff y = \alpha x + \beta$; en particulier :

$$\begin{cases} 1 &= 2\alpha + \beta \\ 2 &= 5\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow 1 = 3\alpha \iff \alpha = \frac{1}{3}; \text{ d'où } \beta = 1 - 2\alpha = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$M(x; y) \in (AB) \iff y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}. M(x; y) \in (\mathcal{D}) \iff 4x + 3y = 1.$$

Donc un point Ω est commun aux deux droites si et seulement si $4x + 3\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) = 1 \iff 4x + x + 1 = 1 \iff 5x = 0 \iff x = 0$, d'où $y = \frac{1}{3}$. L'affixe de Ω est donc $\omega = \frac{1}{3}i$.

- b. Les symétries axiales s_1 et s_2 sont des similitudes indirectes de rapport 1. Leur composée est une similitude directe dont le rapport est le produit des rapports des deux similitudes, donc égal à 1.

Plus précisément si $z' = a\bar{z} + b$, $|a| = 1$ est l'écriture complexe de s_1 et si $z' = c\bar{z} + d$, $|c| = 1$ est l'écriture complexe de s_2 , alors si $M(z)$ a pour image $M'(z')$ par s_1 et $M''(z'')$ est l'image de M' par s_2 , on a :

$$\begin{aligned} z'' &= \overline{cz' + d} \\ &= \overline{c(\overline{a\bar{z} + b}) + d} \\ &= \overline{c(\overline{a}z + \overline{b}) + d} \\ &= \overline{a}cz + \overline{b}c + d \end{aligned}$$

qui est l'écriture complexe d'une similitude directe, car $|\overline{a}c| = |\overline{a}| \times |c| = |a| \times |c| = 1$, d'après les hypothèses.

- c. L'image de C par s_1 est C' et comme on vient de démontrer que C' appartient donc à la droite (\mathcal{D}) il est invariant par s_2 .

Conclusion : $f(C) = C'$.

Ω appartient à (AB), donc $s_1(\Omega) = \Omega$, mais Ω appartient aussi à \mathcal{D} , donc $s_2(\Omega) = \Omega$.

Conclusion $f(\Omega) = \Omega$.

- d. f est une similitude directe de rapport 1. Ce n'est ni l'identité, ni une translation c'est donc une rotation de centre Ω puisque ce point est invariant par f .

3. a. Le couple $(1; -1)$ est solution évidente de l'équation $(4 \times 1 + 3 \times (-1) = 1)$ (1). Si $(x; y)$ est une solution de l'équation on a $4x + 3y = 1$ (2); on a donc par différence (2) - (1) $4(x - 1) + 3(y + 1) = 0 \iff 4(x - 1) = -3(y + 1)$ (3).

4 divise donc $-3(y + 1)$, mais comme il est premier avec -3 il divise $y + 1$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y + 1 = 4k \iff y = -1 + 4k$.

En remplaçant dans (3), $4(x - 1) = -3 \times 4k \iff x - 1 = -3k \iff x = 1 - 3k$.

Les solutions de l'équation $4x + 3y = 1$ sont tous les couples de la forme $(1 - 3k; -1 + 4k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Inversement $4(1 - 3k) + 3(-1 + 4k) = 4 - 12k - 3 - 12k = 1$

montre qu'un couple de la forme $(1 - 3k ; -1 + 4k)$ est solution de l'équation proposée.

- b.** Les points de (\mathcal{D}) à coordonnées entières sont donc les points de coordonnées $(1 - 3k ; -1 + 4k), k \in \mathbb{Z}$. Les points M situés à moins de 9 de O sont tels que $OM < 9 \iff OM^2 < 81 \iff x^2 + y^2 < 81 \iff (1 - 3k)^2 + (-1 + 4k)^2 < 81 \iff 1 + 9k^2 - 6k + 1 + 16k^2 - 8k < 81 \iff 25k^2 - 14k - 79 < 0 \iff k^2 - \frac{14}{25}k - \frac{79}{25} < 0 \iff \left(k - \frac{7}{25}\right)^2 - \frac{49}{625} - \frac{79}{25} < 0 \iff \left(k - \frac{7}{25}\right)^2 - \frac{2024}{625} < 0 \iff \left(k - \frac{7}{25} + \frac{\sqrt{2024}}{25}\right)\left(k - \frac{7}{25} - \frac{\sqrt{2024}}{25}\right) < 0$.

Le trinôme est positif sauf entre les racines $\frac{7}{25} - \frac{\sqrt{2024}}{25} \approx -1,51$ et

$$\frac{7}{25} + \frac{\sqrt{2024}}{25} \approx 2,07.$$

Les entiers k solutions sont donc : $-1 ; 0 ; 1 ; 2$. Les quatre points de (\mathcal{D}) à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9 sont $E(4 ; -5)$, $F(1 ; -1)$, $G(-2 ; 3)$, $H(-5 ; 7)$.