Corrigé du baccalauréat Centre étrangers 12 mai 2022

Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

EXERCICE 1 (7 points) **Thèmes : fonction exponentielle**

1. Soit f la fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par $x \longmapsto \dfrac{x}{\text{e}^x}$.

En utilisant la formule de la dérivée d'un quotient, on peut écrire :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1 \times \text{e}^x - x \times \text{e}^x}{(\text{e}^x)^2} = \dfrac{(1-x)\text{e}^x}{\text{e}^{2x}} = \dfrac{1-x}{\text{e}^x} = (1-x)\text{e}^{-x}$. **Réponse c**

2. La courbe représentative donnée est celle de f''. Avec la précision permise par ce graphique, on peut affirmer que f'' est positive sur $[-3~;~-1]$, négative sur $[-1~;~1]$ et s'annule pour $x = -1$.

Cela signifie donc que f' est croissante sur $[-3~;~-1]$ puis décroissante sur $[-1~;~1]$. Donc la fonction f' admet un maximum en $x = -1$. **Réponse d**

3. Les fonctions F proposées sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Dérivons chacune d'entre-elles. $\forall x \in \mathbb{R}$,

a. $F'(x) = -\dfrac{1}{6}\left(3x^2\text{e}^{-x^2} + (x^3+1) \times -2x\text{e}^{-x^2}\right) = -\dfrac{1}{6}\text{e}^{-x^2}(3x^2 - 2x^4 - 2x)$
$= -\dfrac{1}{6}\text{e}^{-x^2}(-2x^3 + 3x^2 - 2x)$.

b. $F'(x) = -\dfrac{1}{4}\left(4x^3 \times \text{e}^{-x^2} + x^4 \times (-2x\text{e}^{-x^2})\right) = -\dfrac{1}{4}\text{e}^{-x^2}\left(4x^3 - 2x^5\right)$.

c. $F'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(2x \times \text{e}^{-x^2} + (x^2+1) \times -2x\text{e}^{-x^2}\right) = -\dfrac{1}{2}\text{e}^{-x^2}(2x - 2x^3 - 2x) = -\dfrac{1}{2} \times \left(-2x^3\text{e}^{-x^2}\right) = x^3\text{e}^{-x^2} = f(x)$.

d. $F'(x) = (6x - 8x^3) \times \text{e}^{-x^2} + (3x^2 - 2x^4) \times -2x\text{e}^{-x^2} = (4x^5 - 14x^3 + 6x)\text{e}^{-x^2}$

Réponse c

4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\text{e}^x\left(1 + \dfrac{1}{\text{e}^x}\right)}{\text{e}^x\left(1 - \dfrac{1}{\text{e}^x}\right)} = \dfrac{1+\text{e}^{-x}}{1-\text{e}^{-x}}$. Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \text{e}^{-x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$. **Réponse b**

5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives notées F. De plus $f(x)$ est de la forme $u'(x)\text{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = 2x+1$. En remarquant que $f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2\text{e}^{2x+1}$, on peut alors écrire que pour tout réel x, $F(x) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{2x+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Sachant que $F(0) = 1$ alors

$\dfrac{1}{2}\text{e}^1 + k = 1 \iff k = 1 - \dfrac{1}{2}\text{e}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\text{e}^{2x+1} + 1 - \dfrac{1}{2}\text{e}$. **Réponse c**

6. Avec la précision permise par le graphique, on peut affirmer que la fonction f est concave sur $[-2~;~1]$, convexe sur $[1~;~4]$ et $f''(1) = 0$ (point d'inflexion). f''est donc négative sur $[-2~;~1]$, positive sur $[1~;~4]$ s'annulant en 1. **Réponse a**

EXERCICE 2 (7 points) **Thème : fonctions logarithme et suites.**

1. • On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

• Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, on a par produit de limites $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x = +\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** La fonction f est continue et dérivable sur $]0~;~+\infty[$. En utilisant le formule de la dérivée d'un produit, $\forall x \in]0~;~+\infty[$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$

b. $f'(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) + 1 \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.
Dans le tableau : $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1}\ln(\mathrm{e}^{-1}) + 1 = -\mathrm{e}^{-1} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-1} > 0$

x	0		e^{-1}		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	1					$+\infty$
					1	
			$1-\mathrm{e}^{-1} \approx 0,632$			

c. $f(1) = 1$. D'après les variations de la fonction f,

- $\forall x \in]0~;~\mathrm{e}^{-1}]$, $f(x) \in [1-\mathrm{e}^{-1}~;~1[$;
- $\forall x \in [\mathrm{e}^{-1}~;~1]$, $f(x) \in [1-\mathrm{e}^{-1}~;~1]$.

Donc $\forall x \in]0~;~1]$, $f(x) \in \left[1-\mathrm{e}^{-1}~;~1\right]$. Or $1-\mathrm{e}^{-1} > 0$ donc $f(x) \in]\,0~;~1]$ pour tout réel x dans $]0~;~1]$.

3. **a.** L'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation :
$y = f'(1)(x-1) + f(1)$
Avec $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$, on en déduit l'équation de (T) : $y = x - 1 + 1 = x$, soit
$M(x~;~y) \in (T) \iff y = x$.

b. Nous savons que $\forall x \in]0~;~+\infty[$, $f'(x) = \ln(x) + 1$.

La fonction f' est continue et dérivable sur $]0~;~+\infty[$, et $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, donc f est convexe sur $]0~;~+\infty[$.

c. La courbe représentative d'une fonction convexe est au-dessus de toutes ses tangentes. En particulier $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de (T). Donc $\forall x \in]0~;~+\infty[$, $f(x) \geqslant x$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0~;~1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrons par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout entier naturel n.
Initialisation : on a $u_0 \in]0~;~1[$, soit $0 < u_0 < 1$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 < u_n < 1$.
On a vu à la question **2. b.** que si $0 < x < 1$, alors $0 < f(x) < 1$.
Donc si $0 < u_n < 1$, alors $0 < f(u_n) < 1$, soit $0 < u_{n+1} < 1$.
Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \in \mathbb{N}$, il l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.

b. D'après la question **3.c**, pour tout réel x positif, $f(x) > x$.
De plus pour tout entier naturel n, $u_n > 0$
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) > u_n$ donc $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée l.

EXERCICE 3 (7 points) **Thème : géométrie dans espace.**

1. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$. Avec $A(3~;~-2~;~2)$, $B(6~;~1~;~5)$, $C(6~;~-2~;~-1)$ et $D(0~;~4~;~-1)$, on obtient : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$.

   Pour que les points A, B, C et D soient coplanaires, il faut que (par exemple) le vecteur $\overrightarrow{AD}$ soit une combinaison linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Existe-t-il un couple de réels $(a~;~b)$ tel que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AB}$? Cette égalité vectorielle se traduit par le système suivant :

   $$\left\{\begin{array}{rcl}3a+3b &=& -3\\ 3a &=& 6\\ 3a-3b &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}a+b &=& -1\\ a &=& 2\\ a-b &=& -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}b &=& -3\\ a &=& 2\\ -b &=& -3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}b &=& -3\\ a &=& 2\\ b &=& 3\end{array}\right.$$

   C'est impossible. Donc le vecteur $\overrightarrow{AD}$ ne peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2. Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3\times3+3\times0+3\times(-3) = 9-9 = 0$. Donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

   Le triangle ABC est rectangle est rectangle en A.

3. Calculons $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$:
   $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = (-3)\times3+6\times3+(-3)\times3 = -9+18-9 = 0$
   $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = (-3)\times3+6\times0+(-3)\times(-3) = -9+9 = 0$
   Donc le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc il est aussi orthogonal à toute combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc orthogonal à tout vecteur du plan (ABC).

4. Les questions précédentes permettent d'affirmer que le point A est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC). Donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC}\times AD$.

   $\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$
   $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
   $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-3)^2+0^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
   Donc $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{1}{2}\times AB\times AC = \dfrac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times3\sqrt{2} = \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$
   Donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{9\sqrt{6}}{2}\times3\sqrt{6} = 27$ unités de volume.

5. Soit $H(5~;~0~;~1)$.

   a. Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont :
   $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$.

   Existe-t-il un couple de réels $(\alpha~;~\beta)$ tel que $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$? Cette égalité vectorielle est équivalente et permet d'écrire le système suivant :

   $$\left\{\begin{array}{rcl}-6\beta &=& -1\\ -3\alpha+3\beta &=& -1\\ -6\alpha-6\beta &=& -4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\beta &=& \dfrac{1}{6}\\ -3\alpha &=& -1-\dfrac{3}{6}\\ -6\alpha &=& -4+1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\beta &=& \dfrac{1}{6}\\ -3\alpha &=& -\dfrac{3}{2}\\ 6\alpha &=& -3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl}\beta & = & \dfrac{1}{6}\\ \alpha & = & \dfrac{1}{2}\end{array}\right. . \quad \text{Donc } \overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}.$$

b. D'après la question précédente, Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de deux vecteurs non-colinéaires dur plan (BCD). On peut donc affirmer que le point H appartient au plan (BCD). Montrons maintenant que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan (BCD), c'est-a-dire que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à une base du plan (BCD), c'est-a-dire orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

On a : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 2\times 0 + 2\times(-3) + (-1)\times(-6) = -6+6 = 0$
$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{DB} = 2\times(-6) + 2\times 3 + (-1)\times(-6) = -12+6+6 = 0$

Donc $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$, donc à toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs, donc à tout vecteur du plan (BCD). Donc H est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).

c. La distance du point A au plan (BCD) est égale à $\|\overrightarrow{AH}\|$:
$\|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{9} = 3$ unités de longueur.

6. $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}_{BCD}\times AH$ d'où $\mathcal{A}_{BCD} = \dfrac{3\times\mathcal{V}_{ABCD}}{AH}$.

Donc $\mathcal{A}_{AHC} = \dfrac{3\times 27}{3} = 27$ unités d'aire.

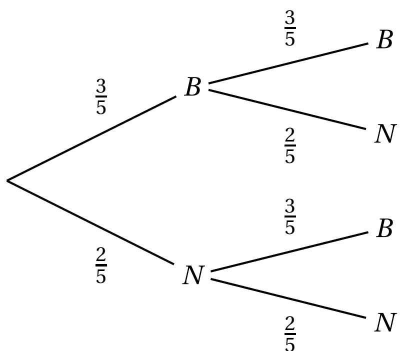
Exercice 4 (7 points) **Thème : probabilités.**

1. On note par

- B l'évènement : « on tire un jeton de couleur blanche » ;
- N l'évènement : « on tire un jeton de couleur noire ».

Ainsi, $p(B) = \dfrac{3}{5}$ et $p(N) = \dfrac{2}{5}$

a. L'arbre complété :



b. Pour perdre 9 euros, il faut avoir tiré deux jetons blancs.
Sachant qu'il s'agit de deux tirages successifs avec remise, et en notant X la variable aléatoire donnant le gain du joueur, on a : $p(X=-9) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

2. **a.** On considère à présent qu'il y a 3 jetons blancs et N jetons noirs, pour un total de $N+3$ jetons. On effectue toujours deux tirages avec remise d'un jeton. On note par X la variable aléatoire donnant le gain du joueur. Donc $X \in \{-9\ ;\ -1\ ;\ 5\}$

- Pour perdre 9 euros, il faut tirer deux jetons blancs : $P(X=-9) = \left(\dfrac{3}{N+3}\right)^2 = \dfrac{9}{(N+3)^2}$
- Pour perdre un euro il faut tirer deux jetons noirs : $P(X=-1) = \left(\dfrac{N}{N+3}\right)^2 = \dfrac{N^2}{(N+3)^2}$
- pour gagner cinq euros, il faut tirer un jeton de chaque couleur (B + N ou N + B) : $P(X=5) = 2 \times \dfrac{3}{N+3} \times \dfrac{N}{N+3} = \dfrac{6N}{(N+3)^2}$

La loi de probabilités est donc :

$X = x_i$	-9	-1	5
$P(X = x_i)$	$\dfrac{9}{(N+3)^2}$	$\dfrac{N^2}{(N+3)^2}$	$\dfrac{6N}{(N+3)^2}$

b. $-x^2+30x-81>0 \iff x^2-30x+81<0$. Les racines du trinôme $x^2-30x+81$ sont $x=3$ et $x=27$. Donc en utilisant les signes du trinôme du second degré, $-x^2+30x-81>0 \iff x \in]3\ ;\ 27[$.

c. Calculons l'espérance de cette loi de probabilité :

$E(X) = (-9) \times \dfrac{9}{(N+3)^2} + (-1) \times \dfrac{N^2}{(N+3)^2} + 5 \times \dfrac{6N}{(N+3)^2} = \dfrac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2}$.

Le jeu est favorable au joueur si et seulement si $E(X) > 0$.

$E(X) > 0 \iff -N^2+30N-81>0 \iff N \in]3\ ;\ 27[$ donc $4 \leqslant N \leqslant 26$ ($N \in [\![4\ ;\ 26]\!]$) : il faut donc entre 4 et 26 jetons noirs (4 et 26 compris) pour que le jeu soit favorable au joueur.

d. Le gain moyen (ou l'espérance) est maximal lorsque la fonction $f\ :\ N \mapsto \dfrac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2}$ est maximale, c'est-à-dire lorsque $f'(N) = 0$.

La fonction f est continue et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Pour $N \in [0\ ;\ +\infty[$:

$f'(N) = \dfrac{(-2N+30)\times(N+3)^2 - 2(N+3)\times(-N^2+30N-81)}{\left((N+3)^2\right)^2} =$

$\dfrac{(-2N+30)(N+3)-2(-N^2+30N-81)}{(N+3)^3} = \dfrac{-2N^2-6N+30N+90+2N^2-60N+162}{(N+3)^3} =$

$\dfrac{-36N+252}{(N+3)^3} = \dfrac{-36(N-7)}{(N+3)^3}$

$f'(N) = 0 \iff N = 7$.

Le gain moyen du joueur est maximal lorsque dans l'urne il y a 7 jetons noirs et 3 jetons blancs.

3. Dans l'urne il y a 7 jetons noirs ($N=7$) et 3 jetons blancs, pour un total de 10 jetons. La probabilité de gagner 5 euros est égale à $p = \dfrac{6\times 7}{10^2} = \dfrac{21}{50} = 0,42$.

On répète ce jeu pour 10 personnes. On note par Y la variable aléatoire donnant le nombre de personnes gagnant 5 euros. Ainsi $Y \in [\![0\ ;\ 10]\!]$. Y suit une loi binomiale (expérience de Bernoulli n'ayant que deux issues et se répétant indépendamment et à l'identique n fois) de paramètres $n=10$ et $p = \dfrac{21}{50}$: $Y \sim \mathscr{B}\left(10\ ;\ \dfrac{21}{50}\right)$

$P(Y \geqslant 0) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \left(\dfrac{29}{50}\right)^{10} \approx 0,996$

Donc la probabilité d'avoir au moins un gagnant à 5 euros est d'environ 0,996. C'est donc un évènement (presque) certain.