Corrigé du baccalauréat Amérique du Sud 27 septembre 2023
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ – Jour 2

Exercice 1 **5 points**

Partie A

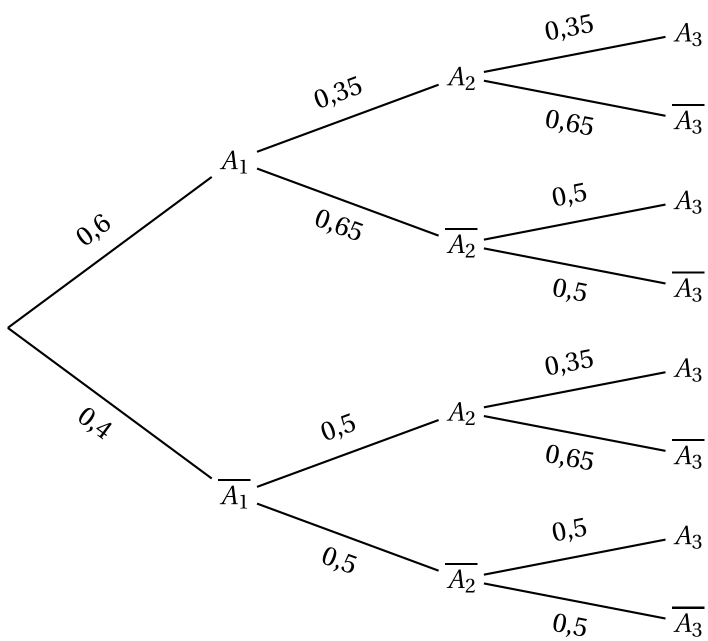
Un jeu proposé dans une fête foraine consiste à effectuer trois tirs successivement sur une cible mouvante.
On a constaté que :

- Si le joueur atteint la cible lors d'un tir alors il ne l'atteint pas lors du tir suivant dans 65 % des cas ;
- Si le joueur n'atteint pas la cible lors d'un tir alors il l'atteint lors du tir suivant dans 50 % des cas.

La probabilité qu'un joueur atteigne la cible lors de son premier tir est de 0,6.
On choisit au hasard un joueur à ce jeu de tirs.
On considère les évènements suivants :

- A_1 : « Le joueur atteint la cible lors du 1$^{\text{er}}$ tir »
- A_2 : « Le joueur atteint la cible lors du 2$^{\text{e}}$ tir »
- A_3 : « Le joueur atteint la cible lors du 3$^{\text{e}}$ tir ».

1. D'après le texte, pour $k = 1$ ou $k = 2$, on a : $P_{A_k}\left(\overline{A_{k+1}}\right) = 0,65$ et $P_{\overline{A_k}}(A_{k+1}) = 0,5$.
Donc $P_{A_k}(A_{k+1}) = 0,35$ et $P_{\overline{A_k}}\left(\overline{A_{k+1}}\right) = 0,5$.
On complète l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur atteint sa cible au cours des trois tirs.

2. La probabilité que le joueur atteigne deux fois la cible au cours des trois tirs est :

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) + P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) + P\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}35 \times 0{,}65 + 0{,}6 \times 0{,}65 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}5 \times 0{,}35 = 0{,}136\,5 + 0{,}195 + 0{,}07 \\ &= 0{,}401\,5 \end{aligned}$$

3. **a.** On a vu que $P(X=2) = 0{,}401\,5$; de plus $P(X=0)$ et $P(X=3)$ sont donnés dans le tableau. On a donc :

$$\begin{aligned} P(X=1) &= 1 - \big(P(X=0) + P(X=2) + P(X=3)\big) = 1 - (0{,}1 + 0{,}401\,5 + 0{,}073\,5) \\ &= 1 - 0{,}575 = 0{,}425 \end{aligned}$$

On complète le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,425	0,401 5	0,073 5

b. $E(X) = 0 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}425 + 2 \times 0{,}401\,5 + 3 \times 0{,}073\,5 = 1{,}448\,5$

c. Sur 3 tirs, le joueur atteindra sa cible, en moyenne, 1,5 fois.

Partie B

On considère N, un entier naturel supérieur ou égal à 1. Un groupe de N personnes se présente à ce stand pour jouer à ce jeu dans des conditions identiques et indépendantes. Un joueur est déclaré gagnant lorsqu'il atteint trois fois la cible. On note Y la variable aléatoire qui compte parmi les N personnes le nombre de joueurs déclarés gagnants.

1. Dans cette question, $N = 15$.

a. L'expérience élémentaire consiste à voir si une personne est gagnante (avec une probabilité $p = 0{,}073\,5$) ou non ; il n'y a donc que deux issues. On effectue cette expérience élémentaire 15 fois dans des conditions identiques et indépendantes.

Donc la variable aléatoire Y qui donne le nombre de gagnants sur 15 personnes, suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}073\,5$.

b. La probabilité qu'exactement 5 joueurs soient gagnants à ce jeu est :

$$P(Y=5) = \binom{15}{5} \times 0{,}073\,5^5 \times (1 - 0{,}073\,5)^{15-5} \approx 0{,}003$$

2. On cherche le nombre minimum n de personnes qui doivent se présenter à ce stand pour que la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gagnant soit supérieure ou égale à 0,98, c'est-à-dire tel que $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}98$. On résout cette inéquation.

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}98 &\iff 1 - P(Y=0) \geqslant 0{,}98 \iff 0{,}02 \geqslant P(Y=0) \\ &\iff 0{,}02 \geqslant \binom{n}{0} \times 0{,}073\,5^0 \times (1 - 0{,}073\,5)^{n-0} \iff 0{,}02 \geqslant 0{,}926\,5^n \\ &\iff \ln(0{,}02) \geqslant \ln\left(0{,}926\,5^n\right) \iff \ln(0{,}02) \geqslant n \times \ln(0{,}926\,5) \\ &\iff \frac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}926\,5)} \leqslant n \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}926\,5)} \approx 51{,}24$ donc $n = 52$.

Exercice 2 **5 points**

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ on considère les points :

$$A(1\,;\,1\,;\,-4),\quad B(2\,;\,-1\,;\,-3),\quad C(0\,;\,-1\,;\,-1)\quad \text{et}\quad \Omega(1;1;2).$$

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2-1\\-1-1\\-3-(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0-1\\-1-1\\-1-(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés ; ils définissent donc un plan.

2. **a.** Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=1\times1+1\times(-2)+1\times1=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-1)+1\times(-2)+1\times3=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC), donc c'est un vecteur normal au plan (ABC).

b. Le plan (ABC) a donc une équation cartésienne de la forme $x+y+z+d=0$. On détermine d en utilisant le fait que le point A appartient au plan (ABC).

$A\in(ABC)\iff x_A+y_A+z_A+d=0\iff 1+1-4+d=0\iff d=2$

Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne $x+y+z+2=0$.

3. **a.** $x_\Omega+y_\Omega+z_\Omega+2=1+1-2+2=2\neq0$ donc $\Omega\notin(ABC)$.

b. Soit H le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (ABC).

Donc $\overrightarrow{\Omega H}$ est un vecteur orthogonal au plan (ABC), donc il est colinéaire au vecteur $\vec{n}$, et il a donc des coordonnées de la forme $\begin{pmatrix}k\\k\\k\end{pmatrix}$, où $k\in\mathbb{R}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega H}$ sont $\begin{pmatrix}x_H-x_\Omega\\y_H-y_\Omega\\z_H-z_\Omega\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_H-1\\y_H-1\\z_H-2\end{pmatrix}$.

On déduit donc que $\left\{\begin{array}{rcl}x_H-1&=&k\\y_H-1&=&k\\z_H-2&=&k\end{array}\right.$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{rcl}x_H&=&1+k\\y_H&=&1+k\\z_H&=&2+k\end{array}\right.$

Or le point H appartient au plan (ABC) donc : $x_H+y_H+z_H+2=0\iff(1+k)+(1+k)+(2+k)+2=0\iff 6+3k=0\iff k=-2$.

Le point H a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-2\\1-2\\2-2\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

On admet que $\Omega H=2\sqrt{3}$. On définit la sphère S de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$ comme l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\Omega M=2\sqrt{3}$.

4. Le point H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC), donc ΩH est la plus courte distance entre Ω et tout point du plan ; autrement dit, tout point N de (ABC) distinct de H est tel que $\Omega\text{N} > \Omega\text{H}$, donc $\Omega\text{N} > 2\sqrt{3}$.

   Ce qui prouve que le point N n'appartient pas à la sphère S.

On dit qu'un plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère S en un point K lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\text{K} \in \mathscr{P} \cap S$
- $(\Omega\text{K}) \perp \mathscr{P}$

5. Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + y - z - 6 = 0$ et le point K de coordonnées K(3 ; 3 ; 0).

   - $x_{\text{K}} + y_{\text{K}} - z_{\text{K}} - 6 = 3 + 3 - 0 - 6 = 0$ donc $\text{K} \in \mathscr{P}$
     $\Omega\text{K}^2 = (3-1)^2 + (3-1)^2 + (0-2)^2 = 4 + 4 + 4 = 12$ donc $\Omega\text{K} = 2\sqrt{3}$; et donc $\text{K} \in S$.
     Donc $\text{K} \in \mathscr{P} \cap S$.
   - Le vecteur $\overrightarrow{\Omega\text{K}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}3-1\\3-1\\0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

     Le plan $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

     $\overrightarrow{\Omega\text{K}} = -2\overrightarrow{n'}$; or $\overrightarrow{n'}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ donc $\overrightarrow{\Omega\text{K}}$ est orthogonal au plan $\mathscr{P}$, et donc $(\Omega\text{K}) \perp \mathscr{P}$.

   On en conclut que le plan $\mathscr{P}$ est tangent à la sphère S au point K.

6. On admet que les plans (ABC) et $\mathscr{P}$ sont sécants selon une droite (Δ).

   Rem. – Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

   Ces vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires donc (ABC) et $\mathscr{P}$ sont sécants selon une droite (Δ).

   On résout le système :

   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{ABC}) \cap \mathscr{P} \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z+2=0\\ x+y-z-6=0\end{array}\right. \iff$

   $\left\{\begin{array}{r} x+y+z+2=0\\ (x+y+z+2)-(x+y-z-6)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z+2=0\\ z+2+z+6=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcr} x+y+z+2 &=& 0\\ z &=& -4\end{array}\right.$

   $\iff \left\{\begin{array}{rcr} x+y-2 &=& 0\\ z &=& -4\end{array}\right.$

   On peut l'écrire $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2-y\\ y &=& y\\ z &=& -4\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2-t\\ y &=& t\\ z &=& -4\end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

   La droite (Δ) a donc pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2-t\\ y &=& t\\ z &=& -4\end{array}\right.$ où $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 **5 points**

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$.

1.
   - Pour $n = 0$ on a : $u_1 = u_{0+1} = 5u_0 - 8 \times 0 + 6 = 0 - 0 + 6 = 6$
   - Pour $n = 1$ on a : $u_2 = u_{1+1} = 5u_1 - 8 \times 1 + 6 = 5 \times 6 - 8 + 6 = 28$
2. Soit n un entier naturel. On complète la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```
def suite_u(n) :
    u = 0
    for i in range(1,n+1) :
        u = 5*u - 8*(i-1) + 6
    return u
```

Rem : il aurait sans doute été plus simple de donner comme algorithme :

```
def suite_u(n) :
    u = 0
    for i in range(0,n) :
        u = 5*u - 8*i + 6
    return u
```

3. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant 2n$.

   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 0$ et $2n = 0$; donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité**
     On suppose que $u_n \geqslant 2n$ pour $n \geqslant 0$; c'est l'hypothèse de récurrence.
     $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6 \geqslant 5 \times (2n) - 8n + 6 = 2n + 6 = 2(n+1) + 4 \geqslant 2(n+1)$
     Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.
   - **Conclusion**
     La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout n.

   On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2n$.

   b. $\lim\limits_{n \to +\infty} 2n = +\infty$ et $u_n \geqslant 2n$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

   c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ donc, d'après la définition de la limite vers $+\infty$ d'une suite, pour tout réel $A > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A; donc il existe un rang n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, alors $u_{n_0} \geqslant 10^p$.
4. Pour tout n, on a : $u_{n+1} - u_n = 5u_n - 8n + 6 - u_n = 4u_n - 8n + 6$; or $u_n \geqslant 2n$ donc $4u_n - 8n \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 6$.
   On en déduit que la suite (u_n) est croissante.
5. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.

a. En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
def suite_v(n):
    L = []
    for i in range(n+1) :
        L.append(suite_u(i) - 2*i + 1)
    return L
```

Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

On peut conjecturer que, pour tout n, on a : $v_{n+1} = 5v_n$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2(n+1) + 1 = 5u_n - 8n + 6 - 2n - 2 + 1 = 5u_n - 10n + 5 = 5(u_n - 2n + 1)$
$= 5v_n$

b. On déduit de la question précédente que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 5$, et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 \times 0 + 1 = 1$.
On a donc, pour tout n : $v_n = v_0 \times q^n = 5^n$.
Pour tout n, $v_n = u_n - 2n + 1$ donc $u_n = v_n + 2n - 1$ et donc $u_n = 5^n + 2n - 1$.

Exercice 4 **5 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \dfrac{1}{4}x$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ du plan.

Partie A

1.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) = \ln(1) = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}x = +\infty$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. $f'(x) = \dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{\mathrm{e}^{x} \times (-\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^{x} \times (1+\mathrm{e}^{-x})} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{-1}{\mathrm{e}^{x}+1} + \dfrac{\mathrm{e}^{x}+1}{4(\mathrm{e}^{x}+1)} = \dfrac{-4+\mathrm{e}^{x}+1}{4(\mathrm{e}^{x}+1)}$
$= \dfrac{\mathrm{e}^{x}-3}{4(\mathrm{e}^{x}+1)}$

b. Sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^{x} - 3$.
$\mathrm{e}^{x} - 3 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{x} \geqslant 3 \iff x \geqslant \ln(3)$
Donc :

- sur $\left]-\infty\,;\,\ln(3)\right[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante ;
- sur $\left]\ln(3)\,;\,+\infty\right[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante ;
- la fonction f admet pour $x = \ln(3)$ un minimum.

c.
- $\ln(3) \approx 1{,}1$ donc $[2\ ;\ 5] \subset]\ln(3)\ ;\ +\infty[$, et donc la fonction f est strictement croissante sur $[2\ ;\ 5]$.
- $f(2) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-2}\right) + \dfrac{1}{4} \times 2 \approx 0{,}63$ donc $f(2) < 1$.
- $f(5) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-5}\right) + \dfrac{1}{4} \times 5 \approx 6{,}25$ donc $f(5) > 1$.
- De plus, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue.

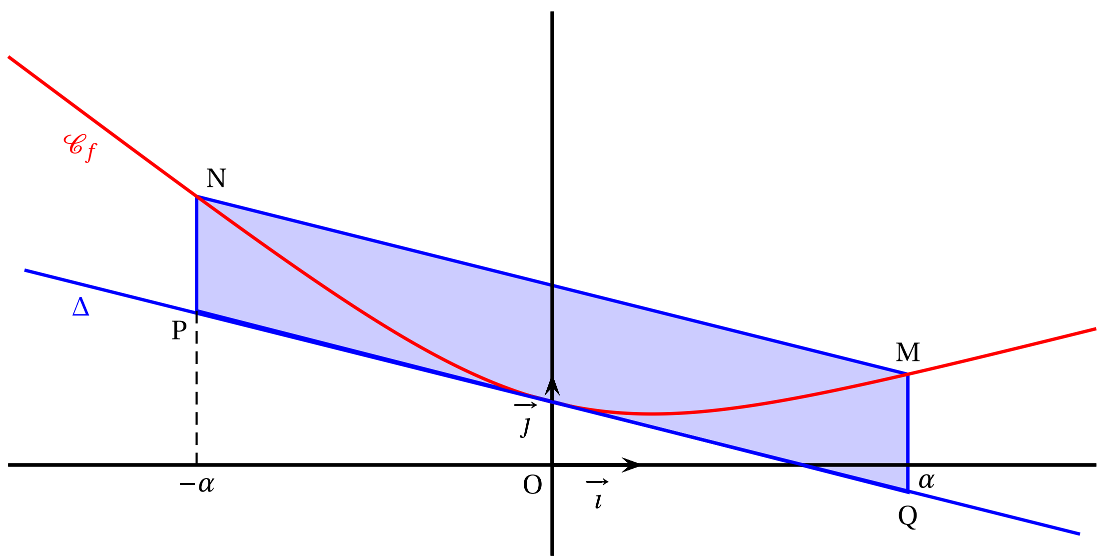
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on peut déduire que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique sur $[2\ ;\ 5]$. On l'appelle α.

Partie B

On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^2}$.

On note Δ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ la tangente Δ et le quadrilatère MNPQ tel que M et N sont les deux points de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives α et $-\alpha$, et Q et P sont les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives α et $-\alpha$.



1. **a.** Pour tout réel x :
- $\mathrm{e}^{x} > 0$;
- $\mathrm{e}^{x} > 0$ donc $\mathrm{e}^{x}+1 > 0$ donc $\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^2 > 0$.

Donc $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^2} > 0$.

b. Pour tout réel x, $f''(x) > 0$ donc la fonction f est convexe ; sa courbe représentative est donc située au-dessus de toutes ses tangentes, donc au-dessus de Δ.

De plus, comme la fonction f est convexe, sa courbe représentative entre les points M et N est située en-dessous de la sécante (MN).

Donc la portion de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-\alpha\ ;\ \alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère MNPQ.

2. **a.** $f(-\alpha) = \ln(1+\mathrm{e}^{\alpha}) - \dfrac{1}{4}\alpha = \ln\left(\mathrm{e}^{\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\alpha}+1\right)\right) - \dfrac{1}{4}\alpha = \ln\left(\mathrm{e}^{\alpha}\right) + \ln\left(\mathrm{e}^{-\alpha}+1\right) - \dfrac{1}{4}\alpha$

$= \alpha + \ln\left(\mathrm{e}^{-\alpha}+1\right) - \dfrac{1}{4}\alpha = \ln\left(\mathrm{e}^{-\alpha}+1\right) + \dfrac{3}{4}\alpha$

b. On sait que $f(\alpha) = 1$, donc $\ln\left(1+\mathrm{e}^{-\alpha}\right) + \dfrac{1}{4}\alpha = 1$ et donc $\ln\left(1+\mathrm{e}^{-\alpha}\right) = 1 - \dfrac{1}{4}\alpha$.

Donc comme $f(-\alpha) = \ln\left(\mathrm{e}^{-\alpha}+1\right) + \dfrac{3}{4}\alpha$, on a : $f(-\alpha) = 1 - \dfrac{1}{4}\alpha + \dfrac{3}{4}\alpha = 1 + \dfrac{1}{2}\alpha$.

Les points M et N ont respectivement pour coordonnées $\left(\alpha\,;\, f(\alpha)\right)$ et $\left(-\alpha\,;\, f(-\alpha)\right)$ donc le coefficient directeur de la droite (MN) est égal à :

$$\frac{y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{N}}}{x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{N}}} = \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{\alpha - (-\alpha)} = \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{2}\alpha\right)}{2\alpha} = \frac{-\frac{1}{2}\alpha}{2\alpha} = -\frac{1}{4}$$

La droite Δ est tangente en 0 à la courbe $\mathscr{C}_f$; donc son coefficient directeur est égal à : $f'(0) = \dfrac{\mathrm{e}^{0} - 3}{4\left(1+\mathrm{e}^{0}\right)} = \dfrac{1-3}{4(1+1)} = \dfrac{-2}{8} = -\dfrac{1}{4}$

Les droites (MN) et Δ ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles, donc (MN) // (QP).

Par construction, les droites (MQ) et (NP) sont parallèles.

On peut donc en déduire que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.