

# ✎ Corrigé du baccalauréat spécialité Jour 1 ✎

## Métropole Antilles-Guyane 8 septembre 2022

**Exercice 1 7 points**

**Thèmes : fonctions, suites**

1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}.$$

On a pour tout réel  $x$ ,  $g(x) = \frac{e^x \times 2}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{2}{1 + e^{-x}}$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1$  et enfin  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2}{1} = 2$ . Réponse **b**.

2. La dérivée seconde  $f''$  est positive sur les intervalles  $] -\infty ; -1[$  et  $[2 ; +\infty[$ , donc la fonction  $f$  est convexe sur ces intervalles. Réponse **c**.

3. On a pour tout naturel  $n$  :

$$b_{n+1} = a_{n+1} - 2 = 0,5a_n + 1 - 2 = 0,5a_n - 1 = 0,5(a_n - 2) = 0,5b_n.$$

L'égalité  $b_{n+1} = 0,5b_n$  montre que la suite  $(b_n)$  est une suite géométrique de raison 0,5.

Réponse **d**.

4. • Comme  $-1 < \frac{1}{4} < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$ ;

• On a  $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$ . Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{n}{n+1} = 1$ .

On a donc  $1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq u_n \leq 2 - \frac{n}{n+1}$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{n}{n+1} = 1$ .

D'après le théorème des gendarmes, on peut dire que la suite  $(u_n)$  est convergente et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ . Réponse **b**.

5. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x^2 \ln x$ .

Si  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$ , alors  $F'(x) = x^2 \left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x} = x^2 \ln x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 = x^2 \ln x = f(x)$ . Réponse **a**.

6.  $2 + \frac{3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1} = \frac{2e^{-x} + 2 + 3e^{-x} - 5}{e^{-x} + 1} = \frac{5e^{-x} - 3}{e^{-x} + 1}$ ; en multipliant chaque terme par  $e^x$ , on obtient :  $\frac{5 - 3e^x}{1 + e^x}$ . Réponse **a**.

**Exercice 2 7 points**

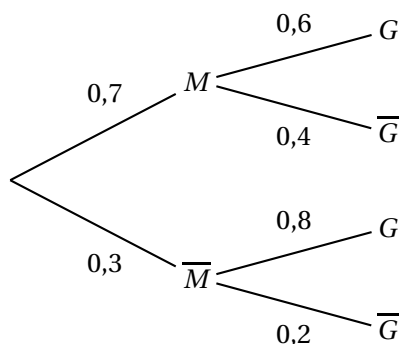
**Thème probabilités**

1. a. On a  $p(M) = 0,7$ , donc  $p(\overline{M}) = 1 - 0,7 = 0,3$ .

Or  $p(\overline{M} \cap \overline{G}) = 0,06$  donc

$$p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(\overline{G}) = 0,06 \iff 0,3 \times p_{\overline{M}}(\overline{G}) = 0,06 \iff p_{\overline{M}}(\overline{G}) = 0,2.$$

b. On complète l'arbre pondéré :



c. La probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » est :  $p(\overline{M} \cap \overline{G}) = p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(\overline{G}) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$ .

d. On a de même  $p(M \cap G) = p(M) \times p_M(G) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$ .

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(G) = p(M \cap G) + p(\overline{M} \cap G) = 0,42 + 0,24 = 0,66.$$

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée.

$$\text{On calcule } p_G(M) = \frac{p(G \cap M)}{p(G)} = \frac{p(M \cap G)}{p(G)} = \frac{0,42}{0,66} = \frac{42}{66} = \frac{21}{33} = \frac{7}{11} \approx 0,64 > 0,5.$$

L'affirmation est exacte.

3. a. On a le tableau de probabilités suivant :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	17	12	5	0

b. D'après le tableau précédent :

$$E(T) = 17 \times 0,42 + 12 \times 0,28 + 5 \times 0,24 + 0 \times 0,06 = 7,14 + 3,36 + 1,2 = 11,7.$$

Ceci signifie que sur un grand nombre de visiteurs la dépense moyenne par visiteur est égale à 11,70 €.

c. Soit  $x$  le nombre minimum de visiteurs,  $x$  doit vérifier :

$$11,7 \times x > 700 \iff x > \frac{700}{11,7}. \text{ Or } \frac{700}{11,7} \approx 59,8.$$

Il faut donc qu'il y ait au moins 60 visiteurs.

4. Soit  $g$  le prix à payer pour visiter la grotte; le tableau de probabilités devient :

évènement	$M \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap G$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
probabilité	0,42	0,28	0,24	0,06
dépense	$12 + g$	12	$g$	0

L'espérance devient :

$$E = 0,42(12 + g) + 12 \times 0,28 + 0,24 \times g + 0 \times 0,06 = 5,04 + 0,42g + 3,36 + 0,24g = 8,4 + 0,66g.$$

Le responsable veut que :

$$8,4 + 0,66g = 15 \iff 0,66g = 6,6 \iff g = 10.$$

Le prix d'entrée à la grotte doit passer à 10 euros.

5. Le nombre de visiteurs étant suffisamment grand pour que le tirage puisse être considéré avec remise, chaque visiteur a donc en moyenne une probabilité de 0,66 de visiter la grotte.

La variable aléatoire  $G$  égale au nombre de visiteurs de la grotte suit donc une loi binomiale  $\mathcal{B}(100; 0,66)$ .

Il faut donc trouver  $p(G \geq 75)$ .

La calculatrice donne  $p(G \leq 74) \approx 0,9660$ , donc

$$p(G \geq 75) = 1 - p(G \leq 74) \approx 1 - 0,9660 \approx 0,034 \text{ au millième près.}$$

### Exercice 3 7 points

### Thème fonctions logarithmes et exponentielles, suites

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

1. On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

L'axe des abscisses est asymptote horizontale au graphe de la fonction  $f$  au voisinage de plus l'infini.

2. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[1; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

- a. En dérivant  $f(x)$  comme un quotient, on obtient pour  $x \geq 1$  :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

- b. Quel que soit  $x$ ,  $x^2 \geq 0$ , le signe de  $f'(x)$  est donc celui du numérateur  $1 - \ln x$  :

- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff e > x : f'(x) > 0$  sur l'intervalle  $[1; e]$ ;
- $1 - \ln x < 0 \iff 1 < \ln x \iff e < x : f'(x) < 0$  sur l'intervalle  $[e; +\infty[$ .
- $1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff e = x$ .

On a donc le tableau de signes de  $f'(x)$  :

$x$	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\emptyset$	-

- c.  $f(1) = 0$  et  $f(e) = \frac{1}{e}$ ; on dresse le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .

$x$	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{e}$	0

3. a. D'après le tableau de variations sur l'intervalle  $[1; e]$ , la fonction est strictement croissante de 0 à  $\frac{1}{e}$  : l'équation  $f(x) = k$  avec  $0 \leq k \leq \frac{1}{e}$  a donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires une solution unique.
- b. D'après le tableau de variations  $f(x) \leq \frac{1}{e}$  (maximum de  $f$ ) : l'équation  $f(x) = k$  avec  $k > \frac{1}{e}$  n'a donc pas de solution

### Partie B

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^{\frac{x}{4}}$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$u_{n+1} = e^{\frac{u_n}{4}}$  c'est-à-dire :  $u_{n+1} = g(u_n)$ .

1. La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sur cet intervalle :

$g'(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}$  : produit de deux facteurs supérieurs à zéro, cette dérivée est supérieure à zéro, donc  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété  $u_n \leq u_{n+1} \leq e$ .

- *Initialisation*

$u_0 = 1$  et  $u_1 = e^{u_0} = e^1 = e$ . On a bien :  $u_0 \leq u_1 \leq e$ ; la propriété est vraie pour  $n = 0$ .

- *Hérédité*

Supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $u_n \leq u_{n+1} \leq e$ .

Par croissance de la fonction  $g$ , on a :  $g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(e)$  soit

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq g(e)$$

Or  $g(e) = e^{\frac{e}{4}} \approx 1,97$ ; donc  $g(e) \leq e$  et l'encadrement précédent devient :

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq e : \text{la propriété est vraie au rang } n + 1.$$

- *Conclusion*

L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang  $n \in \mathbb{N}$ , il est vrai au rang  $n + 1$ ; d'après le principe de récurrence : quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq u_{n+1} \leq e$ .

3. L'encadrement précédent montre :

- que la suite  $(u_n)$  est croissante;
- que la suite  $(u_n)$  est majorée par  $e$ .

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente vers une limite inférieure ou égale à  $e$ .

On note  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$  et on admet que  $\ell$  est solution de l'équation :  $e^{\frac{\ell}{4}} = \ell$ .

4. Quel que soit  $x > 0$ ,  $e^{\frac{x}{4}} = x \iff \frac{x}{4} = \ln x$ , par croissance de la fonction  $\ln$ .  
 Or  $\frac{x}{4} = \ln x \iff \frac{1}{4} = \frac{\ln x}{x}$ , soit finalement :  $f(x) = \frac{1}{4}$  avec  $f$  fonction définie dans la partie A.
5. On a :  $e < 4$  donc  $\frac{1}{4} < \frac{1}{e}$  donc  $0 \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{e}$ .  
 D'après la question 3. a. de la partie A, l'équation  $f(x) = \frac{1}{4}$  a donc une solution unique sur l'intervalle  $[1; e]$ .  
 La calculatrice donne :  $f(1) = 0$  et  $f(2) = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,346$ ;  
 $f(1,4) \approx 0,24$  et  $f(1,5) \approx 0,27$ , donc  $1,4 < \ell < 1,5$ ;  
 $f(1,42) \approx 0,247$  et  $f(1,43) \approx 0,251$ , donc  $1,42 < \ell < 1,43$ ;  
 $f(1,429) \approx 0,2498$  et  $f(1,430) \approx 0,2501$ , donc  $1,429 < \ell < 1,430$ ;  
 Finalement  $\ell \approx 1,43$  au centième près.

**Exercice 4 7 points****Thème : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points

$$A(-1; -1; 3), \quad B(1; 1; 2), \quad C(1; -1; 7)$$

On considère également la droite  $\Delta$  passant par les points  $D(-1; 6; 8)$  et  $E(11; -9; 2)$ .

1. a. Avec  $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ -6 \end{pmatrix}$ , on peut prendre comme vecteur directeur de  $\Delta$  :  $\frac{1}{3} \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

On a  $M(x; y; z) \in (DE) \iff$  il existe  $t \in \mathbb{R}$ , tel que  $\overrightarrow{DM} = t \frac{1}{3} \overrightarrow{DE}$ , soit

$$\begin{cases} x+1 = 4t \\ y-6 = -5t \\ z-8 = -2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = -1+4t \\ y = 6-5t \\ z = 8-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- b. La droite  $\Delta'$  est parallèle à  $\Delta$  donc elle a les mêmes vecteurs directeurs que  $\Delta$ . De plus, elle passe par l'origine  $O$  du repère donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0+4t \\ y = 0-5t \\ z = 0-2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ soit } \begin{cases} x = 4t \\ y = -5t \\ z = -2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- c.  $F(1,36; -1,7; -0,7) \in \Delta' \iff \begin{cases} 1,36 = 4t \\ -1,7 = -5t \\ -0,7 = -2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$

Les deux premières équations donnent  $t = 0,34$  et la dernière  $t = 0,35$ .  
 Donc  $F \notin \Delta$ .

2. a. On a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$  : ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires, donc les trois points A, B et C définissent un plan.

b. On a  $\frac{1}{3}\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = 8 - 10 + 2 = 0$ ;

De même  $\frac{1}{3}\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 + 0 - 8 = 0$ .

Donc  $\overrightarrow{DE}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC); il est normal à ce plan.

c. D'après la question précédente on sait que :

$$M(x; y; z) \in (ABC) \iff 4x - 5y - 2z + d = 0 \text{ avec } d \in \mathbb{R}$$

$$\text{Or } A(-1; -1; 3) \in (ABC) \text{ donc } 4 \times (-1) - 5 \times (-1) - 2 \times 3 + d = 0 \text{ avec } d \in \mathbb{R}, \text{ soit } -5 + d = 0 \iff d = 5.$$

$$\text{Conclusion : } M(x; y; z) \in (ABC) \iff 4x - 5y - 2z + 5 = 0.$$

3. a.  $G(7; -4; 4) \in \Delta \iff \begin{cases} 7 = -1 + 4t \\ -4 = 6 - 5t \\ 4 = 8 - 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$

Ces trois équations ont pour solution  $t = 2$ , donc  $G(7; -4; 4) \in \Delta$ .

b. Le point H appartient à la droite  $\Delta$  et au plan (ABC). Donc ses coordonnées  $x, y, z$  vérifient le système :

$$\begin{cases} x & = & -1 + 4t \\ y & = & 6 - 5t \\ z & = & 8 - 2t \\ 4x - 5y - 2z + 5 & = & 0 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

En remplaçant  $x, y, z$  par leurs valeurs en fonction de  $t$  dans la dernière équation, on obtient :

$$4(-1 + 4t) - 5(6 - 5t) - 2(8 - 2t) + 5 = 0 \iff -4 + 16t - 30 + 25t - 16 + 4t + 5 = 0 \iff 45t - 45 = 0 \iff 45t = 45 \iff t = 1.$$

Les coordonnées de H sont donc  $(-1 + 4; 6 - 5; 8 - 2)$  soit  $H(3; 1; 6)$ .

c. La distance du point G au plan (ABC) est donc égale à GH.

$$\text{Or } GH^2 = (3 - 7)^2 + (1 + 4)^2 + (6 - 4)^2 = 16 + 25 + 4 = 45, \text{ d'où}$$

$$GH = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

4. a. D'après la question 2. a., on a  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + 2 \times 0 + 4 \times (-1) = 4 - 4 = 0$  : les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires : le triangle ABC est rectangle en A.

b. En prenant comme base le triangle ABC, la hauteur correspondante est GH, donc :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times GH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times AC \times GH.$$

$$\text{On a } AB^2 = 2^2 + 2^2 + (-1)^2 = 4 + 4 + 1 = 9, \text{ donc } AB = 3;$$

$$AC^2 = 2^2 + 0^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20, \text{ donc } AC = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Donc } V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 15.$$