

Sujet 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1

4 points

1. On sait que $xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$: géométriquement l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la représentation graphique de f au voisinage de plus l'infini. L'affirmation 1 est vraie.

On a $f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} = e^{-x}(5 - 5x) = 5e^{-x}(1 - x)$.

$f'(x) + f(x) = 5e^{-x}(1 - x) + 5xe^{-x} = 5e^{-x}$, donc f vérifie l'équation différentielle (E) : l'affirmation 2 est vraie.

2. La suite (v_n) est minorée et majorée mais on ne sait rien de sa monotonie, rien sur sa convergence : l'affirmation 3 est fausse.

Exemple : $u_n = -1 - \frac{1}{n}$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 1 + \frac{1}{n}$: on ne peut rien dire de la suite (v_n) .

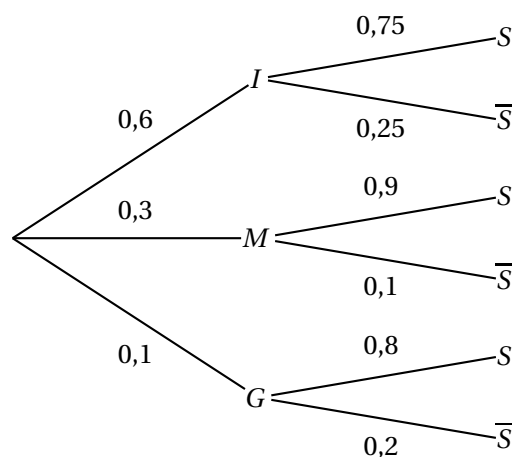
Si (u_n) est croissante et (w_n) décroissante, on a donc

$u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq w_{n-1} \leq \dots \leq w_1 \leq w_0$: on a bien l'encadrement considéré : l'affirmation 4 est vraie.

EXERCICE 2

5 points

1. Voici l'arbre pondéré :



2. La probabilité cherchée est $p(I \cap S) = p(I) \times p_I(S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$.

3. On a de même $p(M \cap S) = p(M) \times p_M(S) = 0,3 \times 0,9 = 0,27$.

$$p(G \cap S) = p(G) \times p_G(S) = 0,1 \times 0,8 = 0,08.$$

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(S) = p(I \cap S) + p(M \cap S) + p(G \cap S) = 0,45 + 0,27 + 0,08 = 0,45 + 0,35 = 0,8.$$

4. on a $p_S(I) = \frac{p(S \cap I)}{p(S)} = \frac{p(I \cap S)}{p(S)} = \frac{0,45}{0,8} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16} = 0,5625$, soit 0,563 au millième près.
5. a. Les conditions de l'étude sont telles que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,8$.
- b. D'après la calculatrice $p(X \geq 25) = 1 - p(X \leq 24) \approx 1 - 0,5725$ soit environ 0,4275, donc 0,428 au millième près.
6. Soit Y la variable aléatoire prenant comme valeurs le nombre de clients satisfaits : elle suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p = 0,8$.

Il faut trouver le plus petit naturel n tel que

$$p(Y \leq n-1) \geq 0,99, \text{ donc tel que } 1 - P(Y = n) \geq 0,99 \iff P(Y = n) \leq 0,01 \iff$$

$$0,8^n \leq 0,01 \iff n \ln 0,8 < \ln 0,01 \text{ (par croissance de la fonction logarithme népérien)}$$

$$\iff n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \text{ car } \ln(0,8) < 0$$

$$\text{Or } \frac{\ln 0,1}{\ln 0,8} \approx 20,6.$$

Il faut donc interroger au moins 21 personnes.

7. a.
- $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$ et T_1 et T_2 sont deux variables indépendantes, donc
 - $V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$.
- b. Il faut trouver :
- $p(5 \leq T \leq 9)$ ou encore $p(4 < T < 10) = p(4 - E(T) < T - E(T) < 10 - E(T)) =$
 $p(-3 < T - E(T) < 3)$ soit $p(|T - E(T)| < 3)$ ou encore $1 - p(|T - E(T)| \geq 3)$ et finalement
d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
- $$p(5 \leq T \leq 9) \geq 1 - \frac{V(T)}{3^2}, \text{ soit}$$
- $$p(5 \leq T \leq 9) \geq 1 - \frac{3}{9} \text{ et finalement :}$$
- $$p(5 \leq T \leq 9) \geq \frac{2}{3}.$$

EXERCICE 3

5 points

1. a. On a $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{25}{2} \end{pmatrix}$.

Or ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et :

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{CA} = 5 - 5 + 0 = 0 \text{ et}$$

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD) : il est donc normal à ce plan.

b. On sait qu'alors :

$$M(x; y; z) \in (\text{CAD}) \iff 1x - 1y + 0z + d = 0 \iff x - y + d = 0, \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

Ceci est vrai pour exemple pour C :

$$C(0; 0; 10) \in (\text{CAD}) \iff 0 - 1y + 0 + d = 0 \text{ avec } d \in \mathbb{R}, \text{ soit } d = 0.$$

$$\text{Donc } M(x; y; z) \in (\text{CAD}) \iff x - y = 0.$$

2. a. Si la droite (D) est sécante au plan (CAD) en un point H les coordonnées de ce point vérifient les équations paramétriques de (D) et celle du plan soit :

$$H(x; y; z) \in D \cap (CAD) \iff \begin{cases} x &= +\frac{5}{2}t \\ y &= 5 - \frac{5}{2}t \\ z &= 0t \\ x - y &= 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \Rightarrow \frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0 \iff$$

$$5t - 5 = 0 \iff t = 1.$$

$$\text{Donc } H\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right).$$

b. On a $M(x; y; z) \in D \iff \begin{cases} x &= 0 + \frac{5}{2}t \\ y &= 5 - \frac{5}{2}t \\ z &= 0 + 0t \end{cases}$

On reconnaît dans les coefficients de t les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $\frac{5}{2}\vec{n}_1$ et

$(0; 5; 0)$ sont les coordonnées de B .

Donc D est la droite contenant B et de vecteur directeur $\vec{n}_1$.

Or on a vu que le vecteur $\vec{n}_1$ est normal au plan (CAD) , donc la droite D est perpendiculaire à (CAD) au point H .

3. a. On a vu que $(BH) = D$ donc a pour vecteur directeur $\vec{n}_1$.

$$\vec{HA} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}_1 \cdot \vec{HA} = \frac{5}{2} - \frac{5}{2} + 0 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{BH}$ et $\vec{HA}$ sont orthogonaux donc les droites (BH) et (HA) sont perpendiculaires, le triangle ABH est rectangle en H .

b. On a $\|\vec{BH}\|^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 0 = \frac{50}{4}$, d'où $\|\vec{BH}\| = BH = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ et

$$\|\vec{HA}\|^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 0 = \frac{50}{4}, \text{ d'où } \|\vec{HA}\| = HA = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}(ABH) = \frac{BH \times HA}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{25 \times 2}{8} = \frac{25}{4}.$$

4. a. Les points A, B et H ont une cote nulle : ils appartiennent donc au plan définis par les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et C a une abscisse et une ordonnée nulles, donc appartient à l'axe $(O, \vec{k})$ qui est perpendiculaire au plan (ABH) , donc (CO) est la hauteur contenant C du tétraèdre $ABCH$.

- b. De façon évidente $CO = 10$, donc :

$$\mathcal{V}(ABCH) = \frac{\mathcal{A}(ABH) \times CO}{3} = \frac{\frac{25}{4} \times 10}{3} = \frac{125}{6}.$$

5. On a $\vec{BA} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$, d'où $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 + 0 + 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc les

droites (BA) et (BC) sont perpendiculaires, le triangle (ABC) est rectangle en B .

On a $BA^2 = 5^2$, donc $BA = 5$ et $BC^2 = 5^2 + 10^2 = 25 + 100 = 125$, donc $BC = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

L'aire du triangle (ABC) est égale à :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}.$$

On a $\mathcal{V}(ABCH) = \frac{\mathcal{A}(ABC) \times d}{3}$, d étant la distance du point H au plan (ABC).

$$\text{On a donc : } \frac{125}{6} = \frac{\frac{25\sqrt{5}}{2} \times d}{3} \iff d = \frac{125}{6} \times \frac{3 \times 2}{25\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

EXERCICE 4

6 points

Partie A : étude de la fonction f .

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x, \quad \text{sur }]0; +\infty[$$

1. a.

• Limite en 0 : On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 = -2$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

• Limite en plus l'infini :

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. Sur l'intervalle de définition f est une somme de fonctions dérivables et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}.$$

c. On a successivement : $0 < x \Rightarrow 0 < 2x < 2x+1$ et

$2x+1 > 2x > 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{2x} > 1 > 0$: donc $f'(x) > 1 > 0$: $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]0; +\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini.

d. f' est elle-même dérivable sur $]0; +\infty[$ et sur cet intervalle, en dérivant la somme $1 + \frac{1}{2x}$ on obtient :

$$f''(x) = 0 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}.$$

Or $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2x^2} > 0$ et enfin $f''(x) < 0$.

Conclusion : la fonction f est concave sur $]0; +\infty[$

2. a. Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la fonction f est continue car dérivable sur cet intervalle et strictement croissante de moins à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]0; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Comme $f(1) = 1 - 2 + 0,5 \times \ln 1 = -1$ et

$f(2) = 2 - 2 + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2} > 0$, le même théorème appliqué à l'intervalle $[1; 2]$ montre que $\alpha \in [1; 2]$.

b. On a donc :

- $f(x) < 0$ sur $]0; \alpha[$;
- $f(x) > 0$ sur $]\alpha; +\infty[$;
- $f(\alpha) = 0$.

c. Le dernier résultat s'écrit :

$$\alpha - 2 + \frac{1}{2} \ln \alpha = 0 \iff \frac{1}{2} \ln \alpha = 2 - \alpha \iff \ln \alpha = 2(2 - \alpha)$$

Partie B étude de la fonction g

Sur $]0; 1]$, $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$.

1. g est une somme de produits de fonctions dérivable sur $]0; 1]$, elle est donc dérivable sur cet intervalle et

$$g'(x) = -2 \times \frac{7}{8}x + 1 - \frac{1}{4} \left(2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \right) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x - x \frac{1}{4} = -\frac{8}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x = 1 - 2x - \frac{x \ln x}{2}.$$

Puisque $x \neq 0$, on peut factoriser x et $g'(x) = x \left(\frac{1}{x} - 2 - \ln x \frac{1}{2} \right)$.

Posons $X = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{X}$; en remarquant que $X = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln X = \ln \left(\frac{1}{x} \right) = -\ln x$, on peut écrire :

$$g'(x) = \frac{1}{X} \left(X - 2 + \frac{1}{2} \ln X \right), \text{ soit } g'(x) = x f \left(\frac{1}{x} \right)$$

2. a. On a vu dans la partie A que $0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) < 0$, soit en prenant les inverses de ces nombres positifs :

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{x} \Rightarrow f \left(\frac{1}{x} \right) > 0.$$

- b. D'après le tableau de signes admis comme $0 < x \leq 1$ on en déduit par produit que :

- $g'(x) > 0$ sur $\left] 0; \frac{1}{\alpha} \right[$; g est croissante sur cet intervalle
- $g'(x) < 0$ sur $\left] \frac{1}{\alpha}; 1 \right[$; g est décroissante sur cet intervalle
- $g' \left(\frac{1}{\alpha} \right) = 0$; $g \left(\frac{1}{\alpha} \right)$ est un maximum de g sur l'intervalle $[0; 1]$.

Partie C : un calcul d'aire

1. a. On sait que sur l'intervalle $]0; 1]$, $\ln x \leq 0$ et comme $x^2 \geq 0$, on conclut que $-\frac{1}{4}x^2 \ln x \geq 0$.

Conclusion : sur l'intervalle $]0; 1]$, $-\frac{7}{8}x^2 + x \leq -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$ ce qui signifie géométriquement que sur cet intervalle l'arc de la parabole est en dessous de la représentation graphique de g .

- b. Ne connaissant pas de primitive évidente de la fonction $x \mapsto x^2 \ln x$, on effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 & v(x) = \frac{x^3}{3} \end{array} \quad \text{d'où}$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\alpha}; 1 \right]$ et leurs dérivées sont continues sur ce même intervalle,

$$\text{donc } \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 - \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \frac{x^2}{3} \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 =$$

$$-\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{3\alpha^3} \ln \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{9\alpha^3} \right) = -\frac{1}{9} - \frac{1}{3\alpha^3} \left(-\ln \alpha - \frac{1}{3} \right),$$

soit en remplaçant $\ln \alpha$ par $2(2 - \alpha)$,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx &= -\frac{1}{9} - \frac{1}{3\alpha^3} \left(-4 + 2\alpha - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{9} + \frac{4}{3\alpha^3} - \frac{2}{3\alpha^2} + \frac{1}{9\alpha^3} = \\ &= \frac{-\alpha^3 + 12 - 6\alpha + 1}{9\alpha^3} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}. \end{aligned}$$

2. L'aire de la partie hachurée est égale la différence des intégrales :

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \left(-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \right) dx - \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \left(-\frac{7}{8}x^2 + x \right) dx, \text{ soit par linéarité de l'intégrale :}$$

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln x \right) dx = -\frac{1}{4} \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 (x^2 \ln x) dx,$$

soit d'après le calcul précédent :

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3} \approx 0,07.$$