

✎ Corrigé du baccalauréat Amérique du Sud 26 septembre 2023 ✎
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ Jour 1

Exercice 1

5 points

Partie A

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x).$$

1. • Limite en 0 : On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x) = 0$, que $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, donc par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

- Limite en $+\infty$: en écrivant $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, on a :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2\ln(x) = -\infty$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2\ln(x) = -\infty$ et enfin par produit de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

2. Pour tout réel de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = 2x - 4x \ln(x) - 2x^2 \times \frac{1}{x} = 2x - 4x \ln(x) - 2x = -4x \ln(x)$.

3. Puisque $x \geq 0$, le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $\ln(x)$.

On sait que $\ln(x) < 0$ sur $]0; 1[$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0; 1[$ et que

$\ln(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$.

La fonction f est donc :

- croissante sur $[0; 1]$ de 1 à $f(1) = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 0 = 2$;
- décroissante sur $[1; +\infty[$ de 2 à moins l'infini.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	-
$f(x)$	1	2	$-\infty$

4. La fonction f est continue car dérivable sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et décroissante de 2 à moins l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α , avec $\alpha \in]1; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

$$\text{Comme } f(e) = 1 + e^2(1 - 2\ln e) = 1 + e^2(1 - 2) = 1 - e^2 \approx -6,4.$$

En appliquant le même théorème, on a donc $1 < \alpha < e$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0; 1]$.

Rem. : comme $0 \notin [1; 2]$ le même théorème montre qu'il n'existe pas de réel $\beta \in [0; 1]$ tel que $f(\beta) = 0$.

5. On part de l'intervalle $[1; 2,7]$, (avec $e \approx 2,7$) dichotomie(1) donne par dichotomie un encadrement de α par deux réels a et b tels que $b - a \leq 10^{-1}$.

Comme $\alpha \approx 1,9$, C et D sont exclus et A ne donne pas un encadrement au dixième : reste la proposition B.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. g est un quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, le dénominateur étant non nul (supérieur ou égal à 1), donc quel que soit $x \in]0; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (1+x^2) - 2x \ln(x)}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1+x^2-2x^2 \ln(x)}{x}}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2 \ln(x)}{x(1+x^2)^2} = \frac{f(x)}{x(1+x^2)^2}.$$

2. Le résultat précédent montre que puisque $x > 0$ et $(1+x^2)^2 > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du numérateur donc le signe de $f(x)$.

Or on a vu (Partie A question 3.) que $f(x) > 0$ sur $]0; \alpha[$ et $f(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

La fonction g est donc croissante sur $]0; \alpha[$, puis décroissante sur $]\alpha; +\infty[$ avec un maximum $g(\alpha)$.

Rem. : on sait que $f(\alpha) = 0 \iff 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha \iff 2\alpha^2 \ln \alpha = 1 + \alpha^2 \iff$

$$\ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}.$$

$$\text{Donc } g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{1 + \alpha^2} = \frac{\frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}}{1 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

3. On note T_1 la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse α .

- On a $M(x; y) \in T_1 \iff y - g(1) = g'(1)(x - 1) \iff y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$;
- On a vu que la fonction a un maximum en α et en ce point le nombre dérivé égal au coefficient directeur de la tangente en ce point (donc T_α) est nul : la tangente est donc horizontale d'équation $y = g(\alpha)$ ou $y = \frac{1}{2\alpha^2}$.

$$\text{Donc } M(x; y) \in T_1 \cap T_\alpha \iff \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\alpha^2}, \text{ soit}$$

$$x - 1 = \frac{1}{\alpha^2} \iff x = 1 + \frac{1}{\alpha^2} \text{ et } y = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

$$\text{Donc } T_1 \cap T_\alpha \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}; \frac{1}{2\alpha^2} \right).$$

Exercice 2

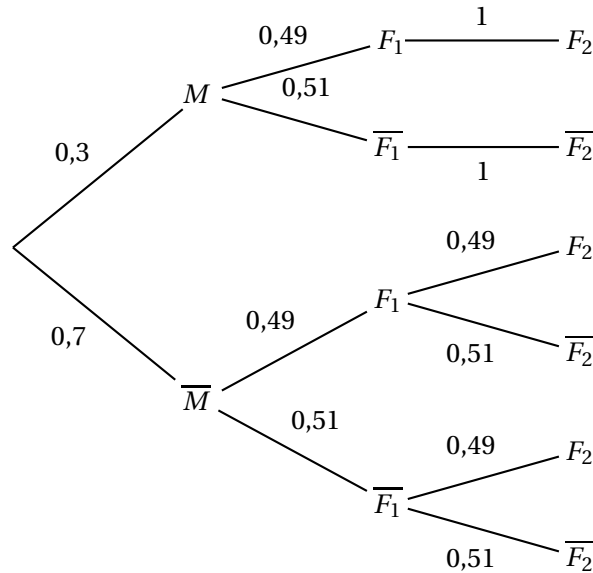
5 points

1.
 - a. On a $\frac{4921}{18221965} \approx 0,0161 \approx 1,6\%$.
 - b. De même $\frac{4921}{18221965} \approx 0,0003 < 0,001$ soit moins de 0,1 %.
2.
 - a. Les 20 accouchements sont des événements indépendants et la probabilité d'avoir une naissance est égale à 0,016, donc la variable X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(20; 0,016)$.
On a $p(X = 1) = 20 \times 0,016 \times 0,984^{19} \approx 0,2355$ soit 0,236 au millièmè près.
 - b. On a $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,984^{20} \times 0,016^0 = 1 - 0,984^{20}$.
Il faut donc résoudre l'inéquation :

$$1 - 0,984^{20} \geq 0,99 \iff 0,01 \geq 0,984^{20} \iff (\text{par croissance de la fonction logarithme népérien}) \ln 0,01 \geq 20 \ln 0,984 \iff n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,984} \text{ soit } n \geq 285,5.$$

Donc en moyenne, sur 286 accouchements il y a un accouchement double.
3. Dans cette maternité, parmi les naissances double, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).
 Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51.
 Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né. On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les événements suivants :
 - M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
 - F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
 - F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

On notera $p(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\bar{A}$ l'évènement contraire de A .



a. Voir ci-dessus

b. On a en suivant les première et troisième branche de l'arbre pondéré :

$$p(F_1 \cap F_2) = 0,3 \times 0,49 \times 1 + 0,7 \times 0,49 \times 0,49 = 0,147 + 0,16807 = 0,31507 \approx 0,316.$$

c. Sachant que les nouveaux-nés sont des jumelles, la probabilité qu'elles soient monozygotes est la probabilité conditionnelle :

$$p_{F_1 \cap F_2}(M) = \frac{p(M \cap (F_1 \cap F_2))}{p(F_1 \cap F_2)} = \frac{0,3 \times 0,49 \times 1}{0,31507} \approx 0,4665 \text{ soit } 0,467 \text{ au millième près.}$$

EXERCICE 3

5 points

$$A(0; 4; 16), \quad B(0; 4; -10), \quad C(4; -8; 0) \quad \text{et} \quad K(0; 4; 3).$$

1. a. On a $CK^2 = (4-0)^2 + (-8-4)^2 + (0-3)^2 = 16 + 144 + 9 = 169 = 13^2$, donc $CK = 13 \iff C \in S$.

- b. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -16 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$

D'où le produit scalaire : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 16 + 144 - 160 = 160 - 160 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, les droites (AC) et (BC) sont perpendiculaires en C, donc le triangle ABC est rectangle en C.

2. a. • $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 - 12 + 0 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$;
• $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 12 - 12 + 0 = 0$: $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées sont égales mais pas les dernières), donc $\vec{n}$ normal deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) est normal à ce plan.

- b. On sait qu'alors les coordonnées de $\vec{n}$ sont les coefficients de x , y et z dans l'équation du plan (ABC).

On a donc $M(x; y; z) \in (ABC) \iff 3x + y + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Or par exemple :

$$C(4; -8; 0) \in (ABC) \iff 3 \times 4 + (-8) + d = 0 \iff 12 - 8 + d = 0 \iff d = -4.$$

$$\text{Finalement } M(x; y; z) \in (ABC) \iff 3x + y - 4 = 0.$$

3. a. Si D appartient à l'axe des abscisses son ordonnée et sa cote sont nuls, donc D a pour coordonnées $(x; 0; 0)$.

$$\begin{aligned} \text{De plus } KD = 13 \Rightarrow KD^2 = 13^2 = 169 &= (x-0)^2 + (0-4)^2 + (0-3)^2 \iff (x-0)^2 + 16 + 9 = 169 \iff x^2 = 144 \iff x^2 = 12^2 \iff x^2 - 12^2 = 0 \iff (x+12)(x-12) = 0 \\ 0 \begin{cases} x-4+12 &= 0 \\ x- &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x+12 &= 0 \\ x-12 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -12 \\ x &= 12 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion $D(12; 0; 0)$.

- b. Si la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) un de ses vecteurs directeurs est le vecteur $\vec{n}$ normal à ce plan. On a donc :

$M(x; y; z) \in \Delta \iff \overrightarrow{DM} = t \vec{n}$, avec $t \in \mathbb{R}$. Cette égalité se traduit par le système :

$$\begin{cases} x-12 &= 3t \\ y-0 &= 1t \\ z-0 &= 0t \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 12+3t \\ y &= t \\ z &= 0t \end{cases}.$$

- c. D appartient à Δ perpendiculaire au plan (ABC); cherchons les coordonnées du projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) : I

I appartient au plan (ABC) et appartient à Δ , ses coordonnées $(x; y; z)$ vérifient donc l'équation du plan (ABC) et les équations paramétriques de Δ soit le système :

$$\begin{cases} x &= 12+3t \\ y &= t \\ z &= 0t \\ 3x+y-4 &= 0 \end{cases}$$

En remplaçant dans la dernière équation x et y par leurs valeurs en fonction de t on obtient $3(12+3t) + t - 4 = 0 \iff 36 + 9t + t - 4 = 0 \iff 10t + 32 = 0$

$$\iff 10t = -32 \iff t = -\frac{32}{10} = -\frac{16}{5}.$$

En reportant cette valeur dans les deux premières équations de Δ , on obtient :

$$x = 12 - 3 \times \frac{16}{5} = \frac{60}{5} - \frac{48}{5} = \frac{12}{5}; y = -\frac{16}{5} \text{ et } z = 0.$$

$$I\left(\frac{12}{5}; -\frac{16}{5}; 0\right).$$

$$\begin{aligned} \text{On calcule } DI^2 &= \left(\frac{12}{5} - 12\right)^2 + \left(-\frac{16}{5} - 0\right)^2 + 0^2 = \left(-\frac{48}{5}\right)^2 + \left(-\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{2304}{25} + \frac{256}{25} = \\ &= \frac{2560}{25} = \frac{256 \times 10}{25}. \end{aligned}$$

$$\text{Finalement } DI = \sqrt{\frac{256 \times 10}{25}} = \frac{16\sqrt{10}}{5}.$$

4. En prenant la base (ABC) rectangle en C : son aire est donc égale à : $\frac{AC \times BC}{2}$.

$$AC^2 = 16 + 144 + 256 = 416; AC = \sqrt{416};$$

$$BC^2 = 16 + 144 + 100 = 260; BC = \sqrt{260}.$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}(ABC) = \frac{\sqrt{416} \times \sqrt{260}}{2} = 52\sqrt{10}$$

$$\text{Donc avec } h = \frac{16\sqrt{10}}{5}, \text{ on obtient :}$$

$$V = \frac{1}{3} \times 52\sqrt{10} \times \frac{16\sqrt{10}}{5} = \frac{1664}{3} \approx 554,7 \text{ soit } 555 \text{ à l'unité près.}$$

Exercice 4**5 points****Partie A**

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1 - x).$$

1. f est une fonction polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$f(x) = 2x - 2x^2, \text{ d'où } f'(x) = 2 - 4x = 2(1 - 2x).$$

On a :

- $f'(x) = 0 \iff 1 - 2x = 0 \iff x = \frac{1}{2};$
- $f'(x) > 0 \iff 1 - 2x > 0 \iff x < \frac{1}{2};$ la dérivée est positive sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, la fonction f est donc croissante sur cet intervalle.
- $f'(x) < 0 \iff 1 - 2x < 0 \iff x > \frac{1}{2};$

2. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

- $u_1 = 2u_0(1 - u_0) = 2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42.$

• Démonstration par récurrence :

— *Initialisation* : on a $u_0 \leq u_1$ car $0,3 \leq 0,42$.

— *Hérédité* On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq u_{n+1}$.

Comme on suppose que $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ on a par croissance de la fonction f sur

$$\left[0; \frac{1}{2}\right], f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right), \text{ soit}$$

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}, \text{ ou encore } u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2} : \text{l'encadrement est vrai au rang } n+1.$$

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est encore au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence on a démontré que :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

3. Cet encadrement montre que

- la suite (u_n) est croissante et
- la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

Conclusion la suite (u_n) croissante et majorée converge vers une limite $\ell \leq \frac{1}{2}$.

4. La fonction f étant continue on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2u_n(1 - u_n), \text{ soit}$$

$$\ell = 2\ell(1 - \ell) \iff \ell = 2\ell - 2\ell^2 \iff 2\ell^2 - \ell = 0 \iff \ell(2\ell - 1) = 0 \iff \begin{cases} \ell &= 0 \\ 2\ell - 1 &= 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \ell &= 0 \\ \ell &= \frac{1}{2} \end{cases} \text{ La seule solution acceptable est } \ell = \frac{1}{2}.$$

Partie B

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.

a. La relation de récurrence s'écrit alors $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0 \times P_n)$, soit

$P_{n+1} - P_n = P_n \iff P_{n+1} = 2P_n$, donc $P_{n+1} = 2P_n$: cette égalité montre que la suite (P_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $P_0 = 3$.

b. On sait quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 \times 2^n = 3 \times 2^n$: la limite de la suite (P_n) est plus l'infini (irréaliste)

2. Dans cette question $b = 0,2$. On a donc $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2P_n)$

a. On a $v_0 = 0,1 \times P_0 = 0,1 \times 3 = 0,3$.

La relation de récurrence devient :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2 \times P_n) \iff P_{n+1} - P_n = P_n - 0,2P_n^2, \text{ d'où}$$

$$P_{n+1} = 2P_n - 0,2P_n^2. \quad (1)$$

$$\text{Or } v_{n+1} = 0,1P_{n+1} = 0,1(2P_n - 0,2P_n^2) = 0,2(P_n - 0,1P_n^2).$$

Comme $v_n = 0,1 \times P_n \iff 10v_n = P_n$, l'égalité ci-dessus devient :

$$v_{n+1} = 0,2(10v_n - 0,1 \times (10v_n)^2), \text{ soit}$$

$$v_{n+1} = 0,2(10v_n - 10v_n^2) = 2v_n(1 - v_n).$$

b. La relation de la question précédente montre que la suite (v_n) est la suite (u_n) de la **Partie A** et on a vu que cette suite converge vers $\frac{1}{2}$.

$$\text{On a donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Or } P_n = 10v_n, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 10 \times \frac{1}{2} = 5.$$

Finalement la population se rapprochera de 5 000 individus.