∽ Corrigé du baccalauréat Amérique du Sud ∾

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Jour 1 - 13 novembre 2025

Exercice 1 — 4 points

Un étudiant mange tous les jours au restaurant universitaire. Ce restaurant propose des plats végétariens et des plats non végétariens.

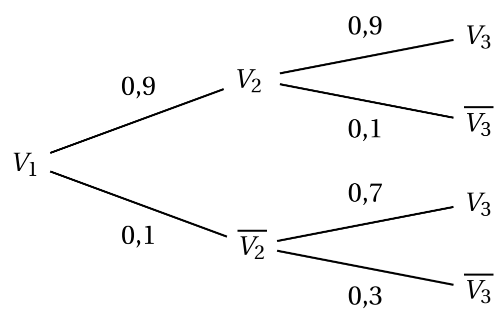
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,9.
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat non végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,7.

Pour tout entier naturel n, on note V_n, l'évènement « l'étudiant a choisi un plat végétarien le n-ième jour » et p_n la probabilité de V_n.

Le jour de la rentrée, l'étudiant a choisi le plat végétarien. On a donc $p_1 = 1$.

1. **a.** Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,9. Or $p_1 = 1$ donc $p_2 = 0{,}9$.

b. $p_3 = P(V_3)$. On représente la situation par un arbre pondéré.



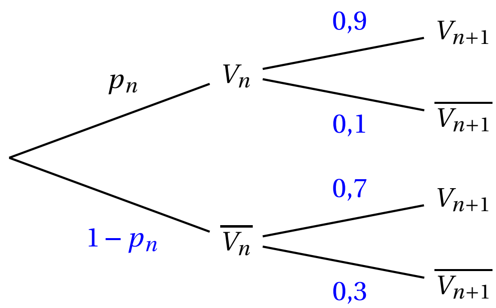
$\left\{V_2\,,\overline{V_2}\right\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_3 = P(V_3) = P(V_2 \cap V_3) + P\left(\overline{V_2} \cap V_3\right) = P(V_2) \times P_{V_2}(V_3) + P\left(\overline{V_2}\right) \times P_{\overline{V_2}}(V_3)$$
$$= 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}7 = 0{,}88$$

c. Sachant que le 3e jour l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il ait choisi un plat non végétarien le jour précédent est :

$$P_{V_3}\left(\overline{V_2}\right) = \frac{P\left(\overline{V_2} \cap V_3\right)}{P(V_3)} = \frac{0{,}1 \times 0{,}7}{0{,}88} = \frac{7}{88} \approx 0{,}08 \text{ au centième près.}$$

2. On complète l'arbre pondéré ci-dessous :



3. $\left\{V_n\,,\overline{V_n}\right\}$ forme une partition donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P\left(V_{n+1}\right) = P\left(V_n \cap V_{n+1}\right) + P\left(\overline{V_n} \cap V_{n+1}\right) = P\left(V_n\right) \times P_{V_n}\left(V_{n+1}\right) + P\left(\overline{V_n}\right) \times P_{\overline{V_n}}\left(V_{n+1}\right)$$

$$= p_n \times 0{,}9 + \left(1-p_n\right) \times 0{,}7 = 0{,}9p_n + 0{,}7 - 0{,}7p_n = 0{,}2p_n + 0{,}7$$

4. On souhaite disposer de la liste des premiers termes de la suite (p_n) pour $n \geqslant 1$.

Pour cela, on utilise une fonction appelée `repas` programmée en langage Python dont on propose trois versions, indiquées ci-dessous.

Programme 1
```
def repas(n):
  p=1
  L=[p]
  for k in range(1,n):
    p = 0.2*p+0.7
    L.append(p)
  return(L)
```

Programme 2
```
def repas(n):
  p=1
  L=[p]
  for k in range(1,n+1):
    p = 0.2*p+0.7
    L.append(p)
  return(L)
```

Programme 3
```
def repas(n):
  p=1
  L=[p]
  for k in range(1,n):
    p=0.2*p+0.7
    L.append(p+1)
  return(L)
```

a. Le programme qui permet d'afficher les n premiers termes de la suite (p_n) est le n° 1.

En effet, le n° 2 donne $n+1$ termes, et le n° 3 donne des valeurs supérieures à 1.

b. Avec le programme n° 1, le résultat affiché pour $n=5$ sera la liste $\left[p_1\,, p_2\,, p_3\,, p_4\,, p_5\right]$.

$p_1 = 1$; $p_2 = 0{,}9$; $p_3 = 0{,}88$; $p_4 = 0{,}2p_3 + 0{,}7 = 0{,}2 \times 0{,}88 + 0{,}7 = 0{,}876$ et
$p_5 = 0{,}2p_4 + 0{,}7 = 0{,}2 \times 0{,}876 + 0{,}7 = 0{,}875\,2$

Le résultat affiché par `repas(5)` sera donc $[1\,;\,0{,}9\,;\,0{,}88\,;\,0{,}876\,;\,0{,}875\,2]$.

5. On va démontrer par récurrence que $p_n = 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875$, pour tout naturel $n \geqslant 1$.

- **Initialisation**

  Pour $n=1$, on a : $0{,}125 \times 0{,}2^{1-1} + 0{,}875 = 0{,}125 + 0{,}875 = 1$.

  Or $p_1 = 1$, donc la propriété est vraie pour $n=1$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n c'est-à-dire que $p_n = 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875$; c'est l'hypothèse de récurrence.

  $$\begin{aligned} p_{n+1} &= 0{,}2p_n + 0{,}7 = 0{,}2\left(0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875\right) + 0{,}7 \\ &= 0{,}125 \times 0{,}2^{n} + 0{,}2 \times 0{,}875 + 0{,}7 = 0{,}125 \times 0{,}2^{n} + 0{,}175 + 0{,}7 \\ &= 0{,}125 \times 0{,}2^{n} + 0{,}875 \end{aligned}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n non nul.

On a donc démontré par récurrence que $p_n = 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875$ pour tout $n \geqslant 1$.

6. $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875 = 0{,}875$

La limite de la suite (p_n) est donc 0,875.

Exercice 2 5 points

1. Deux équipes de footballeurs de 22 et 25 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match. Chaque joueur d'une équipe serre une seule fois la main de chaque joueur de l'autre équipe.

Affirmation 1

47 poignées de mains ont été échangées.

> Chaque joueur de l'équipe de 22 joueurs serre 25 mains ; cela fait donc en tout 22×25 soit 550 poignées de main.
>
> **Affirmation 1 fausse**

2. Une course oppose 18 concurrents. On récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun.

Affirmation 2

Il y a 4 896 possibilités de distribuer ces prix.

> Comme on récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun, il faut chercher le nombre d'ensembles à 3 éléments parmi 18 soit : $\binom{18}{3} = 816$.
>
> **Affirmation 2 fausse**

3. Une association organise une compétition de course de haies qui permettra d'établir un podium (le podium est constitué des trois meilleurs sportifs classés dans leur ordre d'arrivée). Sept sportifs participent au tournoi. Jacques est l'un d'entre eux.

Affirmation 3

Il y a 90 podiums différents dont Jacques fait partie.

> Jacques est sur le podium donc il a décroché une des 3 premières places.
> Si Jacques finit 1$^{\text{er}}$, il y a 6 possibilités pour le 2$^{\text{e}}$ et 5 possibilités pour le 3$^{\text{e}}$; cela fait 30 podiums.
> Si Jacques finit 2$^{\text{e}}$, il y a 6 possibilités pour le 1$^{\text{er}}$ et 5 possibilités pour le 3$^{\text{e}}$; cela fait 30 podiums.
> Si Jacques finit 3$^{\text{e}}$, il y a 6 possibilités pour le 1$^{\text{er}}$ et 5 possibilités pour le 2$^{\text{e}}$; cela fait 30 podiums.
> Il y a 90 podiums différents dont Jacques fait partie.
>
> **Affirmation 3 vraie**

4. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires de même loi donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-2	-1	2	5
$P(X=x_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et on considère Y la variable aléatoire somme de ces deux variables aléatoires.

Affirmation 4

$P(Y=4)=0{,}25$.

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes donc
$P\big((X_1=x_i)\cap\big(X_2=x_j\big)\big)=P(X_1=x_i)\times P\big(X_2=x_j\big)$.
L'événement $(Y=4)$ est réalisé dans 3 cas disjoints :
$(X_1=-1$ et $X_2=5)$, $(X_1=2$ et $X_2=2)$, $(X_1=5$ et $X_2=-1)$.

$$\begin{aligned}P(Y=4)&=P((X_1=-1)\cap(X_2=5))+P((X_1=2)\cap(X_2=2))+P((X_1=5)\cap(X_2=-1))\\&=P(X_1=-1)\times P(X_2=5)+P(X_1=2)\times P(X_2=2)+P(X_1=5)\times P(X_2=-1)\\&=0{,}4\times0{,}2+0{,}3\times0{,}3+0{,}2\times0{,}4=0{,}25.\end{aligned}$$

Affirmation 4 vraie

5. Un nageur s'entraîne dans l'objectif de parcourir le 50 mètres nage libre en moins de 25 secondes. Au fil des entraînements, il s'avère que la probabilité qu'il y parvienne s'établit à 0,85. Il effectue, sur une journée, 20 parcours chronométrés sur 50 mètres. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il nage cette distance en moins de 25 secondes lors de cette journée.

On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0{,}85$.

Affirmation 5

Sachant qu'il a atteint au moins 15 fois son objectif, une valeur approchée à 10^{-3} de la probabilité qu'il l'ait atteint au moins 18 fois est 0,434.

La probabilité cherchée est : $P_{(X\geqslant15)}(X\geqslant18)=\dfrac{P((X\geqslant15)\cap(X\geqslant18))}{P(X\geqslant15)}=\dfrac{P(X\geqslant18)}{P(X\geqslant15)}$

À la calculatrice, on trouve :

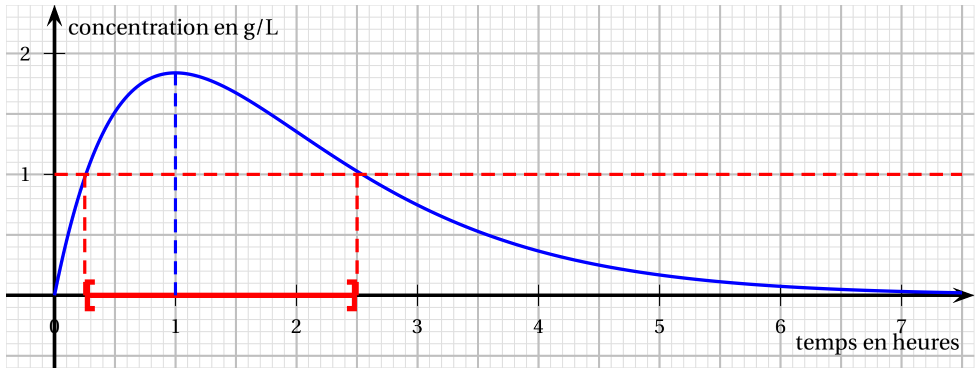
$P(X\geqslant15)\approx0{,}9327$ et $P(X\geqslant18)\approx0{,}4049$ donc $\dfrac{P(X\geqslant18)}{P(X\geqslant15)}\approx0{,}434$.

Affirmation 5 vraie

Exercice 3 — 6 points

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament. On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Partie A : lectures graphiques



On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction f.

Avec la précision permise par le graphique, on donne sans justification :

1. Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle : 1 heure.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geqslant 1$: l'intervalle $[0{,}25\ ;\ 2{,}5]$.
3. La convexité de la fonction f sur l' intervalle $[0\,;\,8]$: la fonction semble concave entre 0 et 2, puis convexe.

Partie B : détermination de la fonction *f*

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = 5\,\mathrm{e}^{-t}$,

d'inconnue y, où y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

On admet que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

1. On résout l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.

   D'après le cours, on sait que les équations différentielles de la forme $ay' + by = 0$ ont des solutions y s'écrivant $y(t) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$ où k est un réel quelconque.

   Donc l'équation (E') a pour solutions les fonctions y s'écrivant $y(t) = k\,\mathrm{e}^{-t}$ où $k \in \mathbf{R}$.
2. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $u(t) = at\,\mathrm{e}^{-t}$ avec $a \in \mathbf{R}$.

   La fonction u est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $u'(t)+u(t) = 5\,\mathrm{e}^{-t}$.

   $u(t) = at\,\mathrm{e}^{-t}$ donc $u'(t) = a \times \mathrm{e}^{-t} + at \times (-1)\,\mathrm{e}^{-t} = a\,\mathrm{e}^{-t} - at\,\mathrm{e}^{-t}$

   $u'(t)+u(t) = 5\,\mathrm{e}^{-t} \iff a\,\mathrm{e}^{-t} - at\,\mathrm{e}^{-t} + at\,\mathrm{e}^{-t} = 5\,\mathrm{e}^{-t} \iff a\,\mathrm{e}^{-t} = 5\,\mathrm{e}^{-t} \iff a = 5$ car $\mathrm{e}^{-t} \neq 0$ pour tout t.

   Donc la fonction u définie par $u(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-t}$ est une solution de (E).
3. La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation sans second membre (E') : ce sont donc les fonctions f définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-t} + 5t\,\mathrm{e}^{-t}$ où $k \in \mathbf{R}$.
4. La personne n'ayant pas pris ce médicament auparavant, on admet que $f(0) = 0$.

   $f(0) = 0 \iff k\,\mathrm{e}^{0} + 5 \times 0 \times \mathrm{e}^{0} = 0 \iff = 0$

   L'expression de la fonction f est $f(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-t}$.

Partie C : étude de la fonction f

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-t}$.

1. On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 5t\,\mathrm{e}^{-t} = 0$, et donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$
   Cela signifie que la concentration en médicament devient nulle quand le temps augmente indéfiniment.
2. f est le produit de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ donc f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   $f(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-t}$ donc $f'(t) = 5\times\ \mathrm{e}^{-t} + 5t\times(-1)\,\mathrm{e}^{-t} = (5-5t)\ \mathrm{e}^{-t}$

   On étudie le signe de $f'(t)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

t	0		1		$+\infty$
$5-5t$		$+$	0	$-$	
e^{-t}		$+$		$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	

   $f(0) = 0$ et $f(1) = 5\times 1\times\ \mathrm{e}^{-1} = 5\,\mathrm{e}^{-1}$

   On établit le tableau de variation complet de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$5\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	0

3. On veut montrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$.

   Le maximum de la fonction f est $f(1) = 5\,\mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}84 > 1$.

   On complète le tableau de variation de f.

t	0	t_1	1	t_2	$+\infty$
f	0	$\nearrow$ 1	$5\,\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$ 1	0

   - Sur l'intervalle $]0\ ;\ 1[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $1 \in \left]f(0)\ ;\ f(1)\right[$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 1$ admet une solution unique dans $]0\ ;\ 1[$. On l'appelle t_1.

     D'après la calculatrice : $f(0{,}25) \approx 0{,}97 < 1$ et $f(0{,}26) \approx 1{,}002 > 1$ donc $0{,}25$ est une valeur approchée de t_1 à 10^{-2}.

- Sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante. De plus $1 \in \left]\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\ ;\ f(1)\right[$. Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(t) = 1$ admet une solution unique dans $]1\ ;\ +\infty[$. On l'appelle t_2.

  D'après la calculatrice : $f(2{,}54) \approx 1{,}002 > 1$ et $f(2{,}55) \approx 0{,}996 < 1$ donc $2{,}54$ est une valeur approchée de t_2 à 10^{-2}.

4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence. C'est donc quand $f(t) \geqslant 1$.

$f(t) \geqslant 1$ pour $t \in [t_1\ ;\ t_2]$, soit pour une durée égale à $t_2 - t_1$ qui vaut environ $2{,}54 - 0{,}25$ soit $2{,}29$ heures; cela fait environ 2 heures et 17 minutes.

Partie D : concentration moyenne

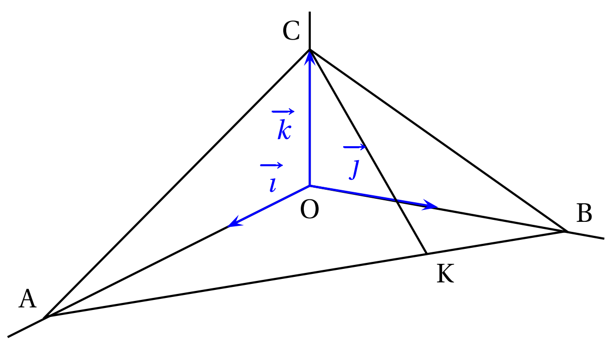
La concentration moyenne du médicament (en gramme par litre de sang) durant la première heure est donnée par : $T_m = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 5t\,\mathrm{e}^{-t}$.

On utilise une intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose $\begin{cases} u(t) = 5t \\ v'(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(t) = 5 \\ v(t) = -\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$

$$\begin{aligned} T_m &= \int_0^1 5t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[5t \times \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 5 \times \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t = \left[-5t\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 - 5\left[\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1 \\ &= \left(-5\,\mathrm{e}^{-1} - 0\right) - \left(-5\,\mathrm{e}^{-1} + 5\,\mathrm{e}^{0}\right) = 5 - 10\,\mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}32 \end{aligned}$$

Exercice 4 5 points



L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points $\mathrm{A}\left(2\sqrt{3}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$, $\mathrm{B}\,(0;\,2;\,0)$, $\mathrm{C}\,(0;\,0;\,1)$ et $\mathrm{K}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ 0\right)$.

1. La droite (CK) est l'ensemble des points $\mathrm{M}\left(x\,,\,y\,,\,z\right)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ soient colinéaires, c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{\mathrm{CM}} = t.\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ où $t \in \mathbf{R}$.

$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{C}} \\ y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{C}} \\ z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ sont $\begin{pmatrix} x_{\mathrm{K}} - x_{\mathrm{C}} \\ y_{\mathrm{K}} - y_{\mathrm{C}} \\ z_{\mathrm{K}} - z_{\mathrm{C}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\text{CM}} = t.\overrightarrow{\text{CK}} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = t.\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l c l} x & = & \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y & = & \frac{3}{2}t \\ z & = & -t+1 \end{array} \right.$$

La droite (CK) a donc pour représentation paramétrique $\left\{ \begin{array}{l c l} x & = & \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y & = & \frac{3}{2}t \\ y & = & -t+1 \end{array} \right. \quad (t \in \mathbf{R})$

2. Soit M(t) un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t. Le point M a donc pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\,,\,\frac{3}{2}t\,,\,-t+1\right)$

$$\text{OM}(t)^2 = (x_{\text{M}} - x_{\text{O}})^2 + \left(y_{\text{M}} - y_{\text{O}}\right)^2 + (z_{\text{M}} - z_{\text{O}})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 + \left(\frac{3}{2}t\right)^2 + (-t+1)^2$$

$$= \frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{4}t^2 + t^2 - 2t + 1 = 4t^2 - 2t + 1$$

Donc : $\text{OM}(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$.

3. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \text{OM}(t)$.

a. $f(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$ donc $f'(t) = \dfrac{8t-2}{2\sqrt{4t^2-2t+1}}$

On étudie le signe de $f'(t)$ sur $\mathbf{R}$.

t	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$8t-2$		$-$	0	$+$	
$2\sqrt{4t^2-2t+1}$		$+$		$+$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$	

Donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,,\,\frac{1}{4}\right]$, et strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,,\,+\infty\right[$.

b. On en déduit que f atteint son minimum pour $t = \frac{1}{4}$.

4. Le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK) est le point M de la droite (CK) tel que la distance OM soit minimale; le point de la droite (CK) réalisant ce minimum correspond donc à $t = \frac{1}{4}$.

C'est donc le point de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4}\,,\,\frac{3}{2} \times \frac{1}{4}\,,\,-\frac{1}{4}+1\right)$ soit $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\,,\,\frac{3}{8}\,,\,\frac{3}{4}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK) ; on l'appelle H.

5. On montre que H appartient au plan (ABC).

- $\overrightarrow{\text{AK}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} - 0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} \\ 0-0 \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont $\begin{pmatrix} 0-2\sqrt{3} \\ 2-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Donc $\overrightarrow{\text{AK}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{AB}}$ donc les points A, K et B sont alignés donc K $\in$ (AB).

- On a : $\left.\begin{array}{r} \text{K} \in (\text{AB}) \\ (\text{AB}) \subset (\text{ABC}) \end{array}\right\} \implies \text{K} \in (\text{ABC}) \implies (\text{CK}) \subset (\text{ABC})$

- On a : $\left.\begin{array}{r}\mathrm{H} \in (\mathrm{CK}) \\ (\mathrm{CK}) \subset (\mathrm{ABC})\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{H} \in (\mathrm{ABC})$

Donc H est un point du plan (ABC).

On montre que H est l'orthocentre du triangle ABC.

- $\overrightarrow{\mathrm{CK}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{8} \times \left(-2\sqrt{3}\right) + \frac{3}{8} \times 2 + \left(-\frac{1}{4}\right) \times 0 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{CK}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ donc (CK) $\perp$ (AB).
  Comme H $\in$ (CK), on en déduit que (CH) $\perp$ (AB).
- $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{8} - 2\sqrt{3} \\ \frac{3}{8} - 0 \\ \frac{3}{4} - 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{15}{8}\sqrt{3} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont $\begin{pmatrix}0-0 \\ 0-2 \\ 1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ -2 \\ 1\end{pmatrix}$

  $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = -\frac{15}{8}\sqrt{3} \times 0 + \frac{3}{8} \times (-2) + \frac{3}{4} \times 1 = 0 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ donc (AH) $\perp$ (BC).

(AH) et (CH) sont donc deux hauteurs du triangle (ABC) donc H est l'orthocentre de ce triangle.

6. **a.** On démontre que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

- On sait que $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CK}}$.
- $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \dfrac{\sqrt{3}}{8} \times \left(-2\sqrt{3}\right) + \dfrac{3}{8} \times 2 + \dfrac{1}{4} \times 0 = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4} + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
- Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC) donc c'est un vecteur normal au plan (ABC). Donc la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

b. D'après le cours, si le vecteur $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(a\,,b\,,c)$ est normal à un plan $\mathscr{P}$, alors ce plan a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\,,\frac{3}{8}\,,\frac{3}{4}\right)$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc le plan (ABC) a une équation de la forme $\frac{\sqrt{3}}{8}x + \frac{3}{8}y + \frac{3}{4}z + d = 0$ c'est-à-dire $x\sqrt{3} + 3y + 6z + 8d = 0$.

On détermine la valeur de d en exprimant que le point A appartient au plan (ABC).

$$\begin{aligned}\mathrm{A} \in (\mathrm{ABC}) &\iff x_{\mathrm{A}}\sqrt{3} + 3y_{\mathrm{A}} + 6z_{\mathrm{A}} + 8d = 0 \iff 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 3 \times 0 + 6 \times 0 + 8d = 0 \\ &\iff 6 + 8d = 0 \iff 8d = -6\end{aligned}$$

Le plan (ABC) a pour équation : $x\sqrt{3} + 3y + 6z - 6 = 0$.

7. (CK) est une hauteur du triangle (ABC) donc l'aire de ce triangle est égale à $\frac{1}{2}\mathrm{CK} \times \mathrm{AB}$.

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\frac{3}{2}\,,-1\right)$ donc :

  $\overrightarrow{\mathrm{CK}}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-1)^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + 1 = 4$ donc CK $= 2$.
- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $\left(-2\sqrt{3}, 2, 0\right)$ donc :

  $\overrightarrow{\mathrm{AB}}^2 = \left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (2)^2 + (0)^2 = 12 + 4 + 0 = 16$ donc AB $= 4$.

L'aire du triangle (ABC) est donc égale, en unités d'aire, à : $\frac{1}{2} \times 2 \times 4$ soit 4.