∾ Baccalauréat Amérique du Nord 27 mars 2023 ∾

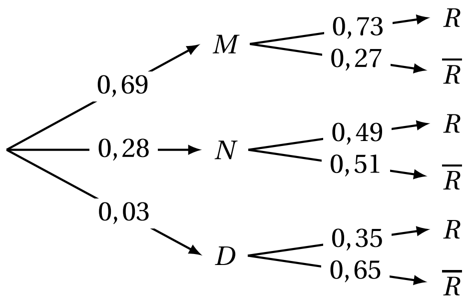
Sujet 1

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 5 points

Partie A

1. Puisqu'on prélève au hasard un déchet, on est en situation d'équiprobabilité et les proportions sont assimilables à des probabilités. On peut donc compléter l'arbre pondéré ci-contre.



2. L'évènement « le déchet est dangereux et recyclable » est $D \cap R$.

   $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,03 \times 0,35 = 0,0105$.

3. $P\left(M \cap \overline{R}\right) = P(M) \times P_M\left(\overline{R}\right) = 0,69 \times 0,27 = 0,1863$.

   Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que sur l'ensemble des déchets produits par l'entreprise, 18,63 % d'entre eux sont des déchets qui sont minéraux et non recyclables.

4. Les évènements M, N et D partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on en déduit :

   $P(R) = P(R \cap M) + P(R \cap N) + P(R \cap D) = 0,69 \times 0,73 + 0,28 \times 0,49 + 0,03 \times 0,35 = 0,6514$

   On obtient bien la probabilité annoncée.

5. La probabilité demandée est :

   $P_R(N) = \dfrac{P(R \cap N)}{P(R)} = \dfrac{0,28 \times 0,49}{0,6514} = \dfrac{686}{3257} \approx 0,2106$ au dix-millième près.

Partie B

1. **a.** On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Puisqu'elle compte le nombre de déchets recyclables, le succès est donc l'évènement R, de probabilité $p = 0,6514$, ceci dans un lot de 20 déchets, ce qui signifie qu'il y a eu $n = 20$ répétitions identiques et indépendantes.

   C'est donc la loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,6514)$ que suit X.

   b. On cherche la probabilité de l'évènement $(X = 14)$. On a :

   $P(X = 14) = \binom{20}{14} p^{14} \times (1-p)^{20-14} = \binom{20}{14} 0,6514^{14} \times 0,3486^6 \approx 0,1723$ au dix-millième près.

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire qui compte le nombre de déchets recyclables dans ce nouvel échantillon. X_n suit donc la loi binomiale de paramètres $(n\,;\,0,6514)$

a. On a $p_n = P(X_n = 0) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} p^0(1-p)^n = (1-p)^n = 0{,}348\,6^n$.

La probabilité qu'aucun déchet ne soit recyclable sur un échantillon de n déchet est donc de $p_n = 0{,}348\,6^n$

b. L'évènement « au moins un déchet du prélèvement est recyclable » est contraire de celui dont on a calculé la probabilité à la question précédente. On est donc amené à résoudre :

$$\begin{aligned}
1 - p_n \geqslant 0{,}999\,9 &\iff -p_n \geqslant -0{,}000\,1 \\
&\iff p_n \leqslant 0{,}000\,1 \qquad \text{car } -1 < 0 \\
&\iff 0{,}348\,6^n \leqslant 0{,}000\,1 \\
&\iff n \ln(0{,}348\,6) \leqslant \ln(0{,}000\,1) \qquad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0{,}000\,1)}{\ln(0{,}348\,6)} \qquad \text{car } 0{,}348\,6 < 1 \text{ donc } \ln(0{,}348\,6) < 0
\end{aligned}$$

Or, on a $\dfrac{\ln(0{,}000\,1)}{\ln(0{,}348\,6)} \approx 8,7$ et comme n est un entier, on en déduit que c'est à partir de 9 déchets dans l'échantillon que la probabilité qu'au moins un des déchets soit recyclable est supérieure ou égale à 0,999 9.

EXERCICE 2 5 points

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

1. a. Déterminons la limite de la fonction g en $-\infty$.

$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$, donc par composition : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = \lim_{y \to -\infty} \mathrm{e}^{y} = 0$.

Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} -2x - 3 = +\infty$

Par limite de somme, on en déduit finalement : $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

b. Pour la limite de la fonction g en $+\infty$, sous la forme actuelle, on a une forme indéterminée.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = 2x \times \left(3 \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} - 1 - \dfrac{3}{2x}\right)$

On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$.

Or, par composition, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{y}}{y} = +\infty$, d'après la propriété des croissances comparées.

Par limite de produit, somme et quotient, on a : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 3 \times \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} - 1 - \frac{3}{2x} = +\infty$.

Finalement, par limite du produit : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

2. a. Soit x un nombre réel :

$g'(x) = 3 \times 2 \times \mathrm{e}^{2x} - 2 \times 1 - 0 = 6\mathrm{e}^{2x} - 2$.

On arrive bien à l'expression annoncée.

b. Résolvons l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned}
g'(x) > 0 &\iff 6\mathrm{e}^{2x} - 2 > 0 \\
&\iff 6\mathrm{e}^{2x} > 2 \\
&\iff \mathrm{e}^{2x} > \frac{1}{3} \qquad \text{car } 6 > 0 \\
&\iff 2x > \ln\left(\frac{1}{3}\right) \qquad \text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\
&\iff 2x > -\ln(3) \\
&\iff x > \frac{-1}{2}\ln(3)
\end{aligned}$$

La fonction g' est donc à valeurs strictement positives sur $\left]\dfrac{-1}{2}\ln(3)\,;\,+\infty\right[$ et à valeurs strictement négatives sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{-1}{2}\ln(3)\right[$ (en résolvant une inéquation similaire).

c. On en déduit le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Calculons l'image de $\dfrac{-1}{2}\ln(3)$:

$$g\left(\frac{-1}{2}\ln(3)\right) = 3\times \mathrm{e}^{2\frac{-1}{2}\ln(3)} - 2\times\frac{-1}{2}\ln(3) - 3 = 3\mathrm{e}^{-\ln(3)} + \ln(3) - 3 = 3\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{3}} + \ln(3) - 3$$
$$= 3\times\frac{1}{3} + \ln(3) - 3 = \ln(3) - 2$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}\ln(3)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(3)-2$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g admet bien un minimum égal à $\ln(3)-2$, atteint pour $x = -\dfrac{1}{2}\ln(3)$.

3. **a.** Calculons l'image de 0 par g :

$g(0) = 3\mathrm{e}^{2\times 0} - 2\times 0 - 3 = 3 - 0 - 3 = 0$.

On a $g(0) = 0$, donc $x = 0$ est bien solution de l'équation $g(x) = 0$.

b. Le nombre $\ln(3) - 2$ est strictement négatif, donc :

- Sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ln(3)\,;\,+\infty\right[$, où g est strictement croissante, on a $g(0) = 0$, donc $x = 0$ est la seule solution à l'équation $g(x) = 0$ sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\ln(3)\right]$, la fonction g est continue (car dérivable) et strictement décroissante. De plus, 0 est une valeur intermédiaire entre $+\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $g\left(-\dfrac{1}{2}\ln(3)\right) = \ln(3) - 2 < 0$.
  D'après le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\ln(3)\right]$.

Finalement, l'équation admet donc bien exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$: 0 et α.

Un balayage à la calculatrice donne $-1,5 < \alpha < -1,4$, pour un encadrement au dixième près.

4. Des variations de g et de la question précédente, on déduit que g est à valeurs strictement positives sur $]-\infty\,;\,\alpha[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$, et à valeurs strictement négatives sur $]\alpha\,;\,0[$.

Partie B - Étude de la fonction f

1. La question posée sous-entend que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, on a :

   $f(x) = 3 \times \mathrm{e}^{3x} - 2 \times \mathrm{e}^{x} - (2x+1)\,\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x} \times (3\mathrm{e}^{2x} - 2 - 2x - 1) = \mathrm{e}^{x} g(x)$.

   On arrive bien à l'expression demandée.

2. La fonction exp est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de g.

   Avec la question **4.** de la **Partie A**, on peut donc établir que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$, car sur ces intervalles, sa fonction dérivée est strictement positive, et elle est strictement décroissante sur $[\alpha\ ;\ 0]$.

3. La fonction f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$, car si elle l'était alors sa fonction dérivée f' serait croissante sur $\mathbb{R}$. Or on a vu que la fonction f' est à valeurs positives sur $]-\infty\ ;\ \alpha[$ puis à valeurs strictement négatives sur $]\alpha\ ;\ 0[$. On a donc notamment : $f'(-2) > 0$ et $f'(-1) < 0$, ce qui prouve que la fonction f' n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ et donc que f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est attendue pour cet exercice, on en fournit quand même dans ce corrigé.

1. **Réponse A.**

   Ici, les quatre propositions peuvent se vérifier avec les longueurs des côtés du triangle ABC. On va donc les déterminer. Comme le repère est orthonormé, on a :

   $\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2 + (z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})^2} = \sqrt{(3+1)^2 + (6-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{36} = 6$

   $\mathrm{BC} = \sqrt{(x_\mathrm{C} - x_\mathrm{B})^2 + (y_\mathrm{C} - y_\mathrm{B})^2 + (z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B})^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (0-6)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

   $\mathrm{AC} = \sqrt{(x_\mathrm{C} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{C} - y_\mathrm{A})^2 + (z_\mathrm{C} - z_\mathrm{A})^2} = \sqrt{(3+1)^2 + (0-2)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{36} = 6$

   ABC est donc clairement un triangle isocèle en A, (et on peut vérifier rapidement que le carré du côté opposé à A est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, et donc que le triangle est aussi rectangle en A).

   Remarque : si on a confiance en ses calculs, une fois qu'on a calculé AB et BC, on peut s'arrêter : on voit clairement que le triangle ne sera pas équilatéral, et donc il sera rectangle et isocèle, car c'est un point commun aux trois autres propositions et le côté [BC] étant plus long que AB, cela signifie que [BC] est l'hypoténuse, et donc que le sommet principal du triangle est A.

2. **Réponse C.**

   Ici, il faut s'armer de patience et vérifier si les coordonnées des points B, C et D vérifient les équations proposées. (On peut aussi chercher à trouver une équation du plan, mais c'est plutôt plus compliqué).

   Pour la proposition **a.**, les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation : elle est incorrecte.

   Pour la proposition **b.**, les coordonnées de C et de D ne vérifient pas l'équation.

Pour la proposition **d.**, aucunes des coordonnées des points B, C et D ne vérifient pas l'équation.

Par contre, pour l'équation de la proposition **c.**, on a :

$4x_{\text{B}} + y_{\text{B}} + z_{\text{B}} - 21 = 4 \times 3 + 6 + 3 - 21 = 12 + 9 - 21 = 0$ donc B appartient à ce plan.

$4x_{\text{C}} + y_{\text{C}} + z_{\text{C}} - 21 = 4 \times 3 + 0 + 9 - 21 = 12 + 9 - 21 = 0$ donc C appartient à ce plan.

$4x_{\text{D}} + y_{\text{D}} + z_{\text{D}} - 21 = 4 \times 8 - 3 - 8 - 21 = 32 - 11 - 21 = 0$ donc D appartient à ce plan.

Ainsi, l'équation de la proposition **c.** décrit un plan qui contient les points B, C et D : c'est le plan (BCD).

3. **Réponse B.**

   Ici, on peut procéder par tests successifs : vérifier parmi les coordonnées proposées quelles sont celles qui vérifient l'équation du plan (ABC) puis pour celles qui vérifient l'équation du plan (c'est-à-dire quand le point donné est bien sur le plan) si le vecteur $\overrightarrow{\text{DH}}$ obtenu est bien un vecteur normal au plan.

   Dans ce corrigé, on va appliquer la démarche qui sert à trouver les coordonnées de H.

   Comme le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - 2y - 2z + 15 = 0$, cela signifie que le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan. Comme H est le projeté orthogonal de D sur (ABC), H est l'intersection du plan (ABC) avec la droite d, passant par D et dirigée par $\overrightarrow{u}$.

   Du coup, la droite d admet une représentation paramétrique qui est : $\left\{\begin{array}{l} x = 8 + k\\ y = -3 - 2k\\ z = -8 - 2k\end{array}\right. \quad k \in \mathbb{R}$

   Si on appelle M_k le point de paramètre k sur la droite d, on va chercher pour quel paramètre M_k est sur le plan (ABC) :

   $$\begin{aligned} M_k \in (\text{ABC}) &\iff (8+k) - 2(-3-2k) - 2 - -8 - 2k) + 15 = 0\\ &\iff 8 + k + 6 + 4k + 16 + 4k + 15 = 0\\ &\iff 9k + 45 = 0\\ &\iff k = -5\end{aligned}$$

   H est donc le point M_{-5} qui a comme coordonnées : $(8 + (-5)\ ;\ -3 - 2 \times (-5)\ ;\ -8 - 2 \times (-5))$, soit $(3\ ;\ 7\ ;\ 2)$.

4. **Réponse D.**

   La représentation paramétrique de Δ donne un vecteur directeur de Δ qui est $\overrightarrow{v}$, de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ alors que le vecteur $\overrightarrow{\text{BC}}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{\text{BC}}\begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}$. Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, donc on peut affirmer que les droites se sont ni confondues ni strictement parallèles.

   Il faut donc déterminer si elles ont un point commun pour trancher entre sécantes et non coplanaires.

La droite (BC) passe par B et est dirigée notamment par $\frac{1}{6}\overrightarrow{\text{BC}}$, elle admet pour représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=6-s \\ z=3+s \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{R}$

Le point de paramètre t sur Δ est confondu avec celui de paramètre s sur (BC) si et seulement si s et t sont les solutions du système (S) suivant :

$$(S) \quad : \quad \left\{\begin{array}{l} 3=5+t \\ 6-s=3-t \\ 3+s=-1+3t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} t=-2 \\ 6-s=5 \\ 3+s=-7 \end{array}\right.$$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{l} t=-2 \\ s=1 \\ s=-10 \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution, donc les droites n'ont aucun point commun et ne sont pas parallèles : elles sont donc non coplanaires.

5. **Réponse B.**

Le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x-y+2z-6=0$ admet $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

(ABC) d'équation cartésienne $x-2y-2z+15=0$ admet $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, donc les plans ne sont pas parallèles. On peut même calculer le produit scalaire $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}$ pour constater qu'ils sont orthogonaux, et donc que les plans sont perpendiculaires. Cela élimine la proposition **a.**

Reste à trancher entre les trois autres propositions.

On pourrait résoudre le système formé par les deux équations de plan pour trouver une représentation paramétrique de leur intersection : ce serait lourd en calcul. Ici, il est plus simple de tester l'appartenance des points A, B et C au plan $\mathscr{P}$. En remplaçant x, y et z par les coordonnées des points dans l'équation de $\mathscr{P}$, on trouve que les points A, et B appartiennent à $\mathscr{P}$, mais pas C, donc les plans sont sécants et leur intersection est la droite (AB).

EXERCICE 4 5 points

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Calculons u_1 : $u_1=\frac{1}{2}\left(u_0+\frac{11}{u_0}\right)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{11}{5}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{25+11}{5}=\frac{18}{5}$.

$$u_2=\frac{1}{2}\left(u_1+\frac{11}{u_1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{18}{5}+\frac{11}{\frac{18}{5}}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{18}{5}+\frac{55}{18}\right)=\frac{599}{180}.$$

2. La fonction f est dérivable sur son ensemble de définition (c'est une fraction rationnelle).

Pour tout réel strictement positif, on a :

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + 11 \times \frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{x^2 - 11}{x^2} = \frac{x^2 - 11}{2x^2}$

Pour tout x dans l'intervalle $\left[\sqrt{11}\ ;\ +\infty\right[$, on a :

$$\begin{aligned} x \geqslant \sqrt{11} &\implies x^2 \geqslant 11 && \text{car la fonction carré est croissante sur } \mathbb{R}^+ \\ &\implies x^2 - 11 \geqslant 0 \\ &\implies \frac{x^2 - 11}{2x^2} \geqslant 0 && \text{car, pour tout réel non nul, } 2x^2 > 0 \\ &\implies f'(x) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\ ;\ +\infty\right[$, f' est à valeurs positives, donc f est croissante.

3. *Remarque :* on constate que la fonction f est telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$u_{n+1} = f(u_n)$, et par ailleurs, on va calculer $f\left(\sqrt{11}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \frac{11}{\sqrt{11}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{11} + \sqrt{11}\right) = \sqrt{11}$

Pour tout entier naturel n, on s'intéresse à l'inégalité : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_n = 5$ et $u_{n+1} = u_1 = \frac{18}{5} = 3,6$ et par ailleurs, on a $\sqrt{11} \approx 3,32$ donc on a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant \sqrt{11}$. L'inégalité est vraie à l'indice 0.

Hérédité : Pour un entier naturel n quelconque fixé, on suppose que l'inégalité est vraie pour l'indice n, c'est-à-dire que l'on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.

$$\begin{aligned} u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11} &\implies f(u_n) \geqslant f(u_{n+1}) \geqslant f\left(\sqrt{11}\right) && \text{car } f \text{ est croissante sur } \left[\sqrt{11}\ ;\ +\infty\right[\\ &\implies u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant \sqrt{11} && \text{grâce aux éléments de la remarque} \end{aligned}$$

Conclusion : On a montré que l'inégalité est vraie pour l'indice 0, et que, pour tout entier naturel n la véracité est héréditaire de l'indice n à l'indice $(n+1)$. En vertu du principe de récurrence, on peut en déduire que :

Pour tout n naturel, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.

4. On a notamment :

- $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant \sqrt{11}$: la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{11}$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant u_{n+1}$: la suite (u_n) est décroissante.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite est donc convergente vers une limite a, telle que $a \geqslant \sqrt{11}$.

5. u est une suite convergente vers une limite réelle a et u a une relation de récurrence de la forme :

$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = f(u_n)$

où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{*+}$, ensemble qui contient tous les termes de la suite (car celle-ci est minorée par $\sqrt{11} > 0$).

D'après le théorème du point fixe, on en déduit que la limite a de la suite doit être une solution de l'équation $f(x) = x$.

Résolvons cette équation dans $\mathbb{R}^{*+}$:

$$\begin{aligned}
f(x)=x &\iff \frac{1}{2}\left(x+\frac{11}{x}\right)=x\\
&\iff x+\frac{11}{x}=2x\\
&\iff -x+\frac{11}{x}=0\\
&\iff -x^2+11=0 \qquad \text{car sur } \mathbb{R}^{*+},\quad x>0\\
&\iff x^2=11\\
&\iff x=\sqrt{11} \qquad \text{car on résout sur } \mathbb{R}^{*+}
\end{aligned}$$

L'équation n'a qu'une unique solution sur $\mathbb{R}^{*+}$, c'est $\sqrt{11}$

On en conclut donc que la suite ne peut converger que vers $\sqrt{11}$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{11}$.

Partie B - Application géométrique

1. **a.** Le rectangle R_0 a pour aire 11 et pour longueur $L_0=5$, donc sa largeur ℓ_0 est telle que $L_0\times\ell_0=11 \iff \ell_0=\dfrac{11}{L_0}$

On a donc bien $\ell_0=\dfrac{11}{5}=2,2$.

b. De façon général, pour tout n entier naturel :

Le rectangle R_n a pour aire 11 et pour longueur L_n, donc sa largeur ℓ_n est telle que $L_n\times\ell_n=11 \iff \ell_n=\dfrac{11}{L_n}$.

2. On sait que pour tout n naturel : $L_{n+1}=\dfrac{L_n+\ell_n}{2}=\dfrac{1}{2}(L_n+\ell_n)=\dfrac{1}{2}\left(L_n+\dfrac{11}{L_n}\right)$.

La relation de récurrence vérifiée par la suite (L_n) est donc la même que celle vérifiée par la suite (u_n) dans la **partie A**. Comme de plus $L_0=u_0=5$, les deux suites sont donc rigoureusement égales.

3. À la **partie A**, question **3.**, on a établi que la suite (u_n), donc la suite (L_n) est minorée par $\sqrt{11}$.

On a donc $\sqrt{11}\leqslant L_n$. De plus :

$$\begin{aligned}
\sqrt{11}\leqslant L_n &\implies \frac{1}{\sqrt{11}}\geqslant\frac{1}{L_n} \qquad \text{car la fonction inverse est strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{*+}\\
&\implies \frac{11}{\sqrt{11}}\geqslant\frac{11}{L_n} \qquad \text{car } 11>0\\
&\implies \sqrt{11}\geqslant\ell_n
\end{aligned}$$

En prenant cette inégalité et celle dont on est parti, on a bien : $\ell_n\leqslant\sqrt{11}\leqslant L_n$.

4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$.

Géométriquement, cela veut dire que notre rectangle R_n a des dimensions qui tendent vers $\sqrt{11}$, donc le rectangle tend vers un carré de côté $\sqrt{11}$.

item Ce script renvoie un encadrement de $\sqrt{11}$ par les valeurs ℓ_n et L_n, arrondies au millionième près, où n est l'argument d'appel de la fonction.

a. Pour l'appel `heron(3)` le retour de la fonction sera donc ℓ_3 et L_3, arrondis au millionième près.

on obtient donc les valeurs suivantes : 3,316 606 , 3,316 643

b. Une interprétation de ces deux valeurs, c'est donc que le nombre $\sqrt{11}$ est compris entre 3,316 606 et 3,316 643, soit un encadrement d'un amplitude inférieure à 4×10^{-5}, soit une précision importante, avec seulement trois itérations de notre algorithme.

Remarque : Ici, la fonction python a été appelée `heron` en référence à Héron d'Alexandrie (qui a vécu sans doute au cours du Ier siècle après JC.).
La méthode de Héron ou méthode babylonienne est une méthode efficace d'extraction de racine carrée, c'est-à-dire de résolution de l'équation $x^2 = a$, avec a positif. Elle porte le nom du mathématicien Héron d'Alexandrie, qui l'expose dans le tome I de son ouvrage Metrica (Les métriques), découvert seulement en 1896 mais certains calculs antérieurs, notamment égyptiens, semblent prouver que la méthode est plus ancienne. (source : wikipedia)