

∞ Corrigé du baccalauréat S – Centres étrangers ∞  
 10 juin 2015

**Exercice 1**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A**

1. On a  $p = 0,03$  et  $n = 500$ . Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$I = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \approx [0,015 ; 0,045]$$

La fréquence observée est  $f = \frac{19}{500} = 0,038$  ;  $f \in I$  donc ce contrôle ne remet pas en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux.

2. La fréquence de cadenas défectueux dans l'échantillon de taille  $n = 500$  observé est  $f = \frac{39}{500} = 0,078$ .

Les trois conditions  $n = 500 \geq 30$ ,  $nf = 39 \geq 5$  et  $n(1-f) = 461 \geq 5$  sont vérifiées.

Donc un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est donné par :

$$\left[ f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}} ; 0,078 + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,033 ; 0,123]$$

**Partie B**

1. Le nombre de cadenas *premier prix* est modélisé par une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi normale de moyenne  $\mu = 725$  et d'écart type  $\sigma = 25$ . On cherche  $P(725 \leq X \leq 775)$ .

Or  $725 = \mu - \sigma$  et  $775 = \mu + \sigma$  ; on cherche donc  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$  dont on connaît une valeur approchée au centième : 0,68 (d'après le cours).

Pour avoir le résultat au millième, on utilise la calculatrice :  $P(725 \leq X \leq 775) \approx 0,683$

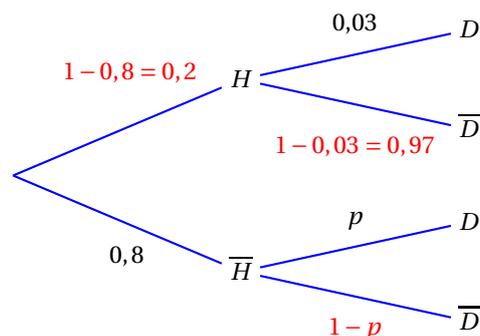
2. On cherche le plus petit entier  $n$  tel que  $P(X > n) < 0,05$  ; or  $P(X > n) < 0,05 \iff P(X \leq n) \geq 0,95$

Pour  $P(X \leq b) = 0,95$ , on obtient à la calculatrice :  $b \approx 791,12$ .

Donc le plus petit nombre  $n$  de cadenas nécessaires en début de mois pour avoir une probabilité de rupture de stock inférieure à 0,05 est  $n = 792$ .

**Partie C**

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(D \cap H) + P(D \cap \overline{H}) = 0,2 \times 0,03 + 0,8 \times p = 0,006 + 0,8p$$

On sait que 7% des cadenas sont défectueux donc  $P(D) = 0,07$ .

$$\text{Donc : } 0,07 = 0,006 + 0,8p \iff \frac{0,07 - 0,006}{0,8} = p \iff p = 0,08$$

Le résultat obtenu est cohérent avec la question A.2 car  $0,08 \in [0,033; 0,123]$ .

3. Le cadenas prélevé est en bon état.

La probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme* est  $P_{\overline{D}}(H)$  :

$$P_{\overline{D}}(H) = \frac{P(H \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(H \cap \overline{D})}{1 - P(D)} = \frac{0,2 \times 0,97}{1 - 0,07} = \frac{0,194}{0,93} \approx 0,209$$

**Exercice 2**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

**1. Affirmation 1 :** l'ensemble S est le segment [AB] – **VRAI**

Soit M le point d'affixe z.

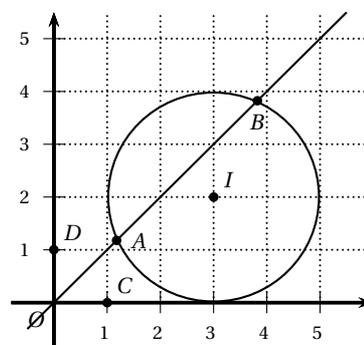
- $|z - 1| = |z - i| \iff MC = MD$  où C est le point d'affixe 1 et D est le point d'affixe i.

L'ensemble des points M tels que  $|z - 1| = |z - i|$  est donc la médiatrice du segment [CD]. C'est donc la droite d'équation  $y = x$ , donc la droite (AB).

- $|z - 3 - 2i| \leq 2 \iff MI \leq 2$  où I est le point d'affixe  $3 + 2i$ .

L'ensemble des points M(z) tels que  $|z - 3 - 2i| \leq 2$  est donc le disque  $\mathcal{D}$  de centre I et de rayon 2.

- L'ensemble des points M(z) vérifiant à la fois  $|z - 1| = |z - i|$  et  $|z - 3 - 2i| \leq 2$  est l'intersection de la droite (AB) et du disque  $\mathcal{D}$ ; c'est donc le segment [AB].



**2. Affirmation 2 :** le nombre complexe  $(\sqrt{3} + i)^{1515}$  est un réel – **FAUX**

Pour qu'un nombre non nul soit réel, il faut et il suffit qu'il ait pour argument 0 ou  $\pi$ , à  $2\pi$  près.

On écrit le nombre  $z = \sqrt{3} + i$  sous forme exponentielle :  $|z| = \sqrt{3 + 1} = 2$ , donc  $z = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$ .

On cherche un réel  $\theta$  tel que 
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc  $\sqrt{3} + i$  a pour argument  $\frac{\pi}{6}$ ; on en déduit que  $(\sqrt{3} + i)^{1515}$  a pour argument  $1515 \times \frac{\pi}{6}$ .

Or  $\frac{1515\pi}{6} = 126 \times 2\pi + \frac{3\pi}{6}$  donc  $(\sqrt{3} + i)^{1515}$  a pour argument  $\frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ .

Donc  $(\sqrt{3} + i)^{1515}$  est un imaginaire pur non nul, donc ce n'est pas un réel.

**3. Affirmation 3 :**

une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par : 
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 7 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. - \text{VRAI}$$

Soit d la droite dont une représentation paramétrique est 
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 7 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On regarde si le point E appartient à cette droite, autrement dit s'il existe une valeur de t pour laquelle

$$\begin{cases} 2 = 2t \\ 1 = -3 + 4t \\ -3 = 7 - 10t \end{cases} \text{ La valeur } t = 1 \text{ convient.}$$

On regarde si le point  $F$  appartient à cette droite, autrement dit s'il existe une valeur de  $t$  pour laquelle

$$\begin{cases} 1 = 2t \\ -1 = -3 + 4t \\ 2 = 7 - 10t \end{cases} \text{ La valeur } t = \frac{1}{2} \text{ convient.}$$

Donc la droite  $(EF)$  a pour représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 7 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

**4. Affirmation 4 :** une mesure en degré de l'angle  $\widehat{FEG}$ , arrondie au degré, est  $50^\circ$  - **VRAI**

Pour déterminer une mesure de l'angle  $\widehat{FEG}$ , on va utiliser le produit scalaire des vecteurs  $\overrightarrow{EF}$  et  $\overrightarrow{EG}$ .

$\overrightarrow{EF}$  a pour coordonnées  $(-1; -2; 5)$  et  $\overrightarrow{EG}$  a pour coordonnées  $(-3; 2; 4)$ ;

donc  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -1 \times (-3) + (-2) \times 2 + 5 \times 4 = 19$

On sait aussi que  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos \widehat{FEG}$ .

On calcule  $EF^2 = 1 + 4 + 25 = 30$  donc  $EF = \sqrt{30}$  et  $EG^2 = 9 + 4 + 16 = 29$  donc  $EG = \sqrt{29}$ .

On a donc  $\cos \widehat{FEG} = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}}{EF \times EG} = \frac{19}{\sqrt{30} \times \sqrt{29}} \approx 0,644$ .

À l'aide de la calculatrice, on trouve  $\widehat{FEG} \approx 49,9^\circ$  dont  $50^\circ$  est une valeur arrondie au degré près.

### Exercice 3

7 points

Commun à tous les candidats

Soit  $a$  un nombre réel fixé non nul. Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} \end{cases}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :  $u_{n+1} = e^{u_n} (e^{u_n} - 1)$ .

1. Soit  $g$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :  $g(x) = e^{2x} - e^x - x$

a) La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$ .

Or  $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} - 2e^x + e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1$

Donc  $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$ .

b) Les variations de la fonction  $g$  dépendent du signe de  $g'$  sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$  donc  $2e^x + 1 > 0$ ; donc  $g'(x)$  est du signe de  $e^x - 1$  :

$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$

$g(0) = e^0 - e^0 - 0 = 0$

La fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; 0]$ , strictement croissante sur  $[0; +\infty[$  et admet un minimum égal à 0 pour  $x = 0$ .

c)  $u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n)$ .

Or la fonction  $g$  a pour minimum 0 sur  $\mathbb{R}$  donc  $g(u_n) \geq 0$  pour tout  $n$  et donc  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  pour tout  $n$ . La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

2. Dans cette question, on suppose que  $a \leq 0$ .

a) Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété  $u_n \leq 0$ .

- *Initialisation* :  $u_0 = a$ ; or  $a \leq 0$  donc  $u_0 \leq 0$ . La propriété est vraie au rang 0.

- *Hérédité* : on suppose la propriété vraie au rang  $p \in \mathbb{N}$  quelconque (où  $p \geq 0$ ), c'est-à-dire  $u_p \leq 0$ ; c'est l'hypothèse de récurrence.

On sait que  $u_{p+1} = e^{u_p} (e^{u_p} - 1)$

D'après l'hypothèse de récurrence,  $u_p \leq 0$  donc  $e^{u_p} \leq 1$  donc  $e^{u_p} - 1 \leq 0$ .

Comme  $e^{u_p} > 0$  on déduit que  $u_{p+1} \leq 0$  et la propriété est vraie au rang  $p + 1$ .

- La propriété  $u_n \leq 0$  est vraie en 0; elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

b) La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 0, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente.

- c) La suite est croissante donc, pour tout  $n$ ,  $u_n \geq u_0$ .  
 Si  $a = 0$ ,  $u_0 = 0$ ; comme, pour tout  $n$ ,  $u_n \geq u_0$  donc  $u_n \geq 0$ .  
 Or on a vu que, pour tout  $n$ ,  $u_n \leq 0$ .  
 Donc pour tout  $n$ ,  $u_n = 0$ .  
 On peut déduire que la suite  $(u_n)$  est constante et égale à 0 donc sa limite est 0.

3. Dans cette question, on suppose que  $a > 0$ .  
 La suite  $(u_n)$  étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout  $n$ ,  $u_n \geq a$ ; comme  $a > 0$ , on peut en déduire que, pour tout  $n$ ,  $u_n > 0$ .

- a) On a vu que, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ .  
 Or  $0 < a \leq u_n$  pour tout  $n$ ; on sait que la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$  donc  $g(0) < g(a) \leq g(u_n)$  et donc  $g(u_n) \geq g(a)$  pour tout  $n$ .  
 On a donc démontré que  $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$ .

- b) Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $u_n \geq a + n \times g(a)$ .
- Pour  $n = 0$ ,  $u_0 = a$  et  $a + n \times g(a) = a + 0 = a$  donc la propriété est vraie au rang 0.
  - On suppose la propriété vraie au rang  $p$  (où  $p \geq 0$ ), c'est-à-dire  $u_p \geq a + p \times g(a)$ ; c'est l'hypothèse de récurrence.  
 On sait que  $u_{p+1} - u_p \geq g(a)$ ; or  $u_p \geq a + p \times g(a)$  (HR). Donc  $u_{p+1} \geq a + p \times g(a) + g(a)$  ce qui équivaut à  $u_{p+1} \geq a + (p + 1) \times g(a)$ .  
 La propriété est donc vraie au rang  $p + 1$ .
  - La propriété  $u_n \geq a + n \times g(a)$  est vraie en 0; elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout  $n$ .

- c)  $a > 0$  donc  $g(a) > 0$  car 0 est le minimum de la fonction  $g$ , atteint en 0.  
 Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n \times g(a)) = +\infty$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$   
 Comme  $u_n \geq a + n \times g(a)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$ , on peut déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

4. Dans cette question, on prend  $a = 0,02$ .  
 L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $u_n > M$ , où  $M$  désigne un réel positif.

- a) On complète l'algorithme :

<b>Variables</b>	$n$ est un entier, $u$ et $M$ sont deux réels
<b>Initialisation</b>	$u$ prend la valeur 0,02 $n$ prend la valeur 0 Saisir la valeur de $M$
<b>Traitement</b>	Tant que $u \leq M$ $u$ prend la valeur $e^{2u} - e^u$ $n$ prend la valeur $n + 1$ Fin tant que
<b>Sortie</b>	Afficher $n$

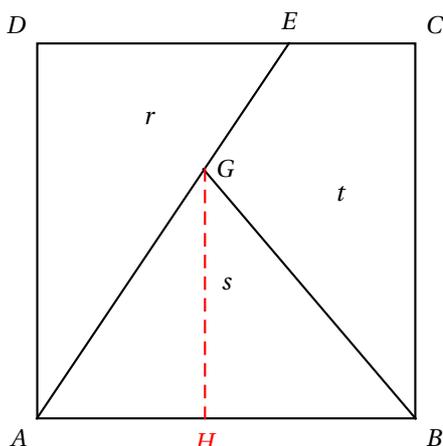
- b) On suppose  $M = 60$ . On trouve à la calculatrice  $u_{35} \approx 2,13$  et  $u_{36} \approx 62,35$ ; donc la valeur affichée par l'algorithme pour  $M = 60$  est 36.

**Exercice 4**

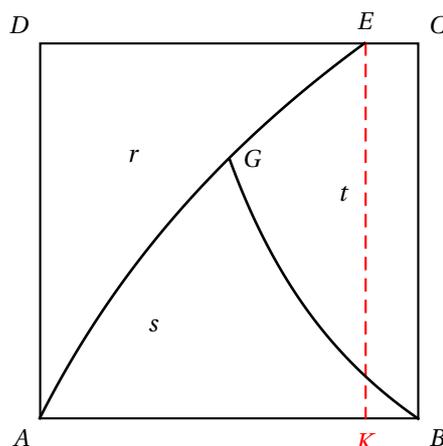
**5 points**

**Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ .

**Partie A : étude de la proposition A**

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales :  $r = s = t = \frac{1}{3}$ .

- Le point  $E$  est situé sur la droite  $(CD)$  donc son ordonnée vaut 1.  
Le nombre  $r$  est l'aire du triangle  $ADE$  qui est égale à  $\frac{AD \times DE}{2}$ .  
De plus, cette aire doit valoir  $\frac{1}{3}$  et on sait que  $AD = 1$ .  
Donc  $\frac{AD \times DE}{2} = \frac{1}{3}$  entraîne  $DE = \frac{2}{3}$ .  
Les coordonnées de  $E$  sont donc  $(\frac{2}{3}; 1)$ .
- Soit  $H$  le pied de la hauteur issue de  $G$  dans le triangle  $ABG$ ; donc  $GH$  est l'ordonnée du point  $G$ .  
L'aire  $s$  du triangle  $ABG$  est :  $\frac{AB \times GH}{2}$ . Or  $AB = 1$  et  $s = \frac{1}{3}$ , donc :  $\frac{1 \times GH}{2} = \frac{1}{3}$  donc  $GH = \frac{2}{3}$ .  
L'ordonnée  $y_G$  de  $G$  est  $\frac{2}{3}$ .  
Le point  $G$  est situé sur la droite  $(AE)$ . Les points  $A$  et  $E$  ont pour coordonnées respectives  $(0; 0)$  et  $(\frac{2}{3}; 1)$ . Donc la droite  $(AE)$  a pour équation  $y = \frac{3}{2}x$ .  
 $G \in (AE)$  d'équation  $y = \frac{3}{2}x$  donc  $y_G = \frac{3}{2}x_G$ . Comme  $y_G = \frac{2}{3}$ , on déduit que  $x_G = \frac{4}{9}$ .  
Le point  $G$  a pour coordonnées  $(\frac{4}{9}; \frac{2}{3})$ .

**Partie B : étude de la proposition B**

1. a) D'après le texte, l'ordonnée  $y_E$  du point  $E$  est égale à 1 et ce point appartient à  $\mathcal{C}_f$  donc

$$f(x_E) = y_E \iff \ln(2x_E + 1) = 1 \iff 2x_E + 1 = e \iff x_E = \frac{e-1}{2}$$

- b) L'abscisse du point  $G$  vaut 0,5 et le point  $G$  appartient à  $\mathcal{C}_f$ ; donc :

$$f(x_G) = y_G \iff f(0,5) = y_G \iff \ln 2 = y_G$$

Le point  $G$  appartient aussi à  $\mathcal{C}_g$  donc :

$$g(x_G) = y_G \iff k \left( \frac{1-x_G}{x_G} \right) = y_G \iff k \left( \frac{1-0,5}{0,5} \right) = \ln 2 \iff k = \ln 2$$

2. a) Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $F(x) = (x+0,5) \times \ln(2x+1) - x$ .

$F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et :

$$F'(x) = 1 \times \ln(2x+1) + (x+0,5) \times \frac{2}{2x+1} - 1 = \ln(2x+1) + 1 - 1 = \ln(2x+1) = f(x)$$

Donc  $f$  a pour primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- b) Soit  $K$  le projeté orthogonal de  $E$  sur  $(AB)$ . Comme le point  $E$  a pour abscisse  $\frac{e-1}{2}$ , et que la fonction  $f$  est positive, l'aire sous la courbe entre 0 et  $\frac{e-1}{2}$  est donnée par :

$$\int_0^{\frac{e-1}{2}} f(x) \, dx = [F(x)]_0^{\frac{e-1}{2}} = F\left(\frac{e-1}{2}\right) - F(0) = \frac{e}{2} \ln e - \frac{e-1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{L'aire du rectangle } ADEK \text{ est } AD \times DE = 1 \times \frac{e-1}{2} = \frac{e-1}{2}.$$

$$\text{Donc } r = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1$$

3.  $g(x) = \ln 2 \times \frac{1-x}{x} = \ln 2 \times \left(\frac{1}{x} - 1\right)$

Donc une primitive de  $g$  sur  $]0; +\infty[$  est donnée par :  $G(x) = \ln 2 \times (\ln x - x)$ .

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que  $s = [\ln(2)]^2 + \frac{\ln(2) - 1}{2}$ .

$$r = \frac{e}{2} - 1 \approx 0,36 \in ]0,3; 0,4[$$

$$s = [\ln(2)]^2 + \frac{\ln(2) - 1}{2} \approx 0,33 \in ]0,3; 0,4[$$

$$t = 1 - r - s \approx 0,31 \in ]0,3; 0,4[$$

Donc la proposition B vérifie les conditions imposées par le fabriquant.

## Exercice 4

5 points

### Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls  $(x, y, z)$  tels que  $x^2 + y^2 = z^2$ . Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » et notés en abrégé « TP ».

#### Partie A : généralités

1. Soit  $(x, y, z)$  un TP; alors  $x^2 + y^2 = z^2$ . Soit  $p$  un entier naturel non nul.

Alors  $p^2 \times x^2 + p^2 \times y^2 = p^2 \times z^2$  ce qui équivaut à  $(px)^2 + (py)^2 = (pz)^2$ .

Donc  $(px, py, pz)$  est aussi un TP.

2. Soit  $(x, y, z)$  un TP.

On va utiliser deux résultats connus du cours : un nombre et son carré ont la même parité, et la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ impair} \Leftrightarrow x^2 \text{ impair} \\ y \text{ impair} \Leftrightarrow y^2 \text{ impair} \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 \text{ pair} \Leftrightarrow z^2 \text{ pair} \Leftrightarrow z \text{ pair}$$

Donc  $x, y$  et  $z$  ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul  $n$  peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance  $\alpha$  de 2 par un entier impair  $k$  :  $n = 2^\alpha \times k$

- a) La décomposition en facteurs premiers de 192 est  $2^6 \times 3$ ; c'est aussi la *décomposition* de 192 au sens donné dans cet exercice.

- b) Soient  $x$  et  $z$  deux entiers naturels non nuls, dont les *décompositions* sont  $x = 2^\alpha \times k$  et  $z = 2^\beta \times m$ .

$$x = 2^\alpha \times k \Rightarrow x^2 = 2^{2\alpha} \times k^2 \Rightarrow 2x^2 = 2^{2\alpha+1} \times k^2$$

$$z = 2^\beta \times m \Rightarrow z^2 = 2^{2\beta} \times m^2$$

- c) Pour que les deux nombres  $2x^2$  et  $z^2$  soient égaux, il faut et il suffit que leurs *décompositions* soient les mêmes (puisque cette *décomposition* est unique); l'un a pour *décomposition*  $2^{\alpha+1} \times k^2$  et l'autre  $2^\beta \times m^2$ .

Ces deux décompositions ne peuvent être les mêmes car  $2\alpha + 1$  est impair et  $2\beta$  est pair.

Donc il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls  $(x, z)$  tels que  $2x^2 = z^2$ .

On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels  $x, y$  et  $z$  sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels  $x, y$  jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP  $(x, y, z)$ , les trois entiers naturels  $x, y$  et  $z$  seront rangés dans l'ordre suivant :  $x < y < z$ .

### Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1.  $2015 = 5 \times 13 \times 31$ ; on en déduit que  $2015 = 5 \times 403$ .

On sait que  $(3, 4, 5)$  est un TP donc, d'après la question 1.  $(3 \times 403, 4 \times 403, 5 \times 403)$  est aussi un TP.

Donc  $(1209, 1612, 2015)$  est un TP.

2. On admet que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = (2n^2+2n+1)^2$ .

Si  $2n+1 = 2015$ , alors  $n = 1007$ .

Pour  $n = 1007$ , on a :  $(2n^2+2n)^2 = 2030112$  et  $(2n^2+2n+1)^2 + 1 = 2030113$ .

Donc  $(2015, 2030112, 2030113)$  est un TP.

3. a) On cherche deux entiers  $x$  et  $z$  tels que :  $z^2 - x^2 = 403^2 \iff (z-x)(z+x) = 403^2$ ; or  $403^2 = 169 \times 961$ . Donc  $z^2 - x^2 = 403^2 \iff (z-x)(z+x) = 169 \times 961$ .

Les nombres  $x$  et  $z$  tels que  $\begin{cases} z-x = 169 \\ z+x = 961 \end{cases}$  répondent à la question.

$$\begin{cases} z-x = 169 \\ z+x = 961 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 961 - 169 \\ 2z = 169 + 961 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 792 \\ 2z = 1130 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 396 \\ z = 565 \end{cases}$$

Donc  $565^2 - 396^2 = 403^2$ .

- b) D'après la question **B 3.a)** :  $396^2 + 403^2 = 565^2$ ; on en déduit que  $(396, 403, 565)$  est un TP.

En multipliant par 5 on obtient le TP cherché :  $(5 \times 396, 5 \times 403, 5 \times 565) = (1980, 2015, 2825)$ .