

∞ Corrigé du baccalauréat S – Centres étrangers ∞
 10 juin 2015

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1. On a $p = 0,03$ et $n = 500$. Un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \approx [0,015; 0,045]$$

La fréquence observée est $f = \frac{19}{500} = 0,038$; $f \in I$ donc ce contrôle ne remet pas en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux.

2. La fréquence de cadenas défectueux dans l'échantillon de taille $n = 500$ observé est $f = \frac{39}{500} = 0,078$.

Les trois conditions $n = 500 \geq 30$, $nf = 39 \geq 5$ et $n(1-f) = 461 \geq 5$ sont vérifiées.

Donc un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 % est donné par :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,078 - \frac{1}{\sqrt{500}}; 0,078 + \frac{1}{\sqrt{500}} \right] \approx [0,033; 0,123]$$

Partie B

1. Le nombre de cadenas *premier prix* est modélisé par une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 725$ et d'écart type $\sigma = 25$. On cherche $P(725 \leq X \leq 775)$.

Or $725 = \mu - \sigma$ et $775 = \mu + \sigma$; on cherche donc $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$ dont on connaît une valeur approchée au centième : 0,68 (d'après le cours).

Pour avoir le résultat au millième, on utilise la calculatrice : $P(725 \leq X \leq 775) \approx 0,683$

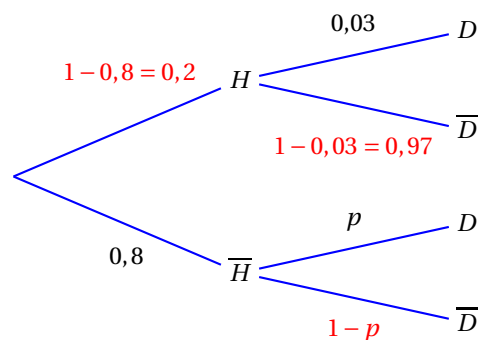
2. On cherche le plus petit entier n tel que $P(X > n) < 0,05$; or $P(X > n) < 0,05 \iff P(X \leq n) \geq 0,95$

Pour $P(X \leq b) = 0,95$, on obtient à la calculatrice : $b \approx 791,12$.

Donc le plus petit nombre n de cadenas nécessaires en début de mois pour avoir une probabilité de rupture de stock inférieure à 0,05 est $n = 792$.

Partie C

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(D \cap H) + P(D \cap \overline{H}) = 0,2 \times 0,03 + 0,8 \times p = 0,006 + 0,8p$$

On sait que 7% des cadenas sont défectueux donc $P(D) = 0,07$.

$$\text{Donc : } 0,07 = 0,006 + 0,8p \iff \frac{0,07 - 0,006}{0,8} = p \iff p = 0,08$$

Le résultat obtenu est cohérent avec la question A.2 car $0,08 \in [0,033; 0,123]$.

3. Le cadenas prélevé est en bon état.

La probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme* est $P_{\overline{D}}(H)$:

$$P_{\overline{D}}(H) = \frac{P(H \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(H \cap \overline{D})}{1 - P(D)} = \frac{0,2 \times 0,97}{1 - 0,07} = \frac{0,194}{0,93} \approx 0,209$$

Exercice 2

4 points

Commun à tous les candidats

1. **Affirmation 1** : l'ensemble S est le segment $[AB]$ – **VRAI**

Soit M le point d'affixe z .

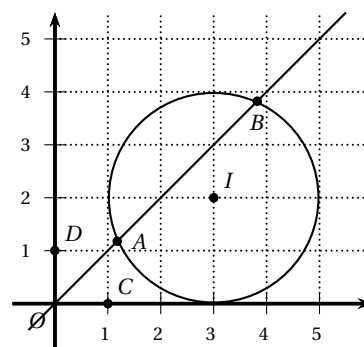
- $|z - 1| = |z - i| \iff MC = MD$ où C est le point d'affixe 1 et D est le point d'affixe i .

L'ensemble des points M tels que $|z - 1| = |z - i|$ est donc la médiatrice du segment $[CD]$. C'est donc la droite d'équation $y = x$, donc la droite (AB) .

- $|z - 3 - 2i| \leq 2 \iff MI \leq 2$ où I est le point d'affixe $3 + 2i$.

L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z - 3 - 2i| \leq 2$ est donc le disque \mathcal{D} de centre I et de rayon 2.

- L'ensemble des points $M(z)$ vérifiant à la fois $|z - 1| = |z - i|$ et $|z - 3 - 2i| \leq 2$ est l'intersection de la droite (AB) et du disque \mathcal{D} ; c'est donc le segment $[AB]$.



2. **Affirmation 2** : le nombre complexe $(\sqrt{3} + i)^{1515}$ est un réel – **FAUX**

Pour qu'un nombre non nul soit réel, il faut et il suffit qu'il ait pour argument 0 ou π , à 2π près.

On écrit le nombre $z = \sqrt{3} + i$ sous forme exponentielle : $|z| = \sqrt{3 + 1} = 2$, donc $z = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$.

On cherche un réel θ tel que
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $\sqrt{3} + i$ a pour argument $\frac{\pi}{6}$; on en déduit que $(\sqrt{3} + i)^{1515}$ a pour argument $1515 \times \frac{\pi}{6}$.

Or $\frac{1515\pi}{6} = 126 \times 2\pi + \frac{3\pi}{6}$ donc $(\sqrt{3} + i)^{1515}$ a pour argument $\frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Donc $(\sqrt{3} + i)^{1515}$ est un imaginaire pur non nul, donc ce n'est pas un réel.

3. **Affirmation 3** :

une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 7 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ – VRAI}$$

Soit d la droite dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 7 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On regarde si le point E appartient à cette droite, autrement dit s'il existe une valeur de t pour laquelle

$$\begin{cases} 2 = 2t \\ 1 = -3 + 4t \\ -3 = 7 - 10t \end{cases} \text{ La valeur } t = 1 \text{ convient.}$$

On regarde si le point F appartient à cette droite, autrement dit s'il existe une valeur de t pour laquelle

$$\begin{cases} 1 = 2t \\ -1 = -3 + 4t \\ 2 = 7 - 10t \end{cases} \text{ La valeur } t = \frac{1}{2} \text{ convient.}$$

Donc la droite (EF) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 7 - 10t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

4. Affirmation 4 : une mesure en degré de l'angle \widehat{FEG} , arrondie au degré, est 50° - **VRAI**

Pour déterminer une mesure de l'angle \widehat{FEG} , on va utiliser le produit scalaire des vecteurs \overrightarrow{EF} et \overrightarrow{EG} .

\overrightarrow{EF} a pour coordonnées $(-1; -2; 5)$ et \overrightarrow{EG} a pour coordonnées $(-3; 2; 4)$;

donc $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -1 \times (-3) + (-2) \times 2 + 5 \times 4 = 19$

On sait aussi que $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos \widehat{FEG}$.

On calcule $EF^2 = 1 + 4 + 25 = 30$ donc $EF = \sqrt{30}$ et $EG^2 = 9 + 4 + 16 = 29$ donc $EG = \sqrt{29}$.

On a donc $\cos \widehat{FEG} = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}}{EF \times EG} = \frac{19}{\sqrt{30} \times \sqrt{29}} \approx 0,644$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\widehat{FEG} \approx 49,9^\circ$ dont 50° est une valeur arrondie au degré près.

Exercice 3

7 points

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel fixé non nul. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = e^{u_n} (e^{u_n} - 1)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = e^{2x} - e^x - x$

a) La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1$.

Or $(e^x - 1)(2e^x + 1) = 2e^{2x} - 2e^x + e^x - 1 = 2e^{2x} - e^x - 1$

Donc $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$.

b) Les variations de la fonction g dépendent du signe de g' sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x , $e^x > 0$ donc $2e^x + 1 > 0$; donc $g'(x)$ est du signe de $e^x - 1$:

$e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$

$g(0) = e^0 - e^0 - 0 = 0$

La fonction g est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$, strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et admet un minimum égal à 0 pour $x = 0$.

c) $u_{n+1} - u_n = e^{2u_n} - e^{u_n} - u_n = g(u_n)$.

Or la fonction g a pour minimum 0 sur \mathbb{R} donc $g(u_n) \geq 0$ pour tout n et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n . La suite (u_n) est donc croissante.

2. Dans cette question, on suppose que $a \leq 0$.

a) Soit \mathcal{P}_n la propriété $u_n \leq 0$.

- *Initialisation* : $u_0 = a$; or $a \leq 0$ donc $u_0 \leq 0$. La propriété est vraie au rang 0.

- *Hérédité* : on suppose la propriété vraie au rang $p \in \mathbb{N}$ quelconque (où $p \geq 0$), c'est-à-dire $u_p \leq 0$; c'est l'hypothèse de récurrence.

On sait que $u_{p+1} = e^{u_p} (e^{u_p} - 1)$

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_p \leq 0$ donc $e^{u_p} \leq 1$ donc $e^{u_p} - 1 \leq 0$.

Comme $e^{u_p} > 0$ on déduit que $u_{p+1} \leq 0$ et la propriété est vraie au rang $p + 1$.

- La propriété $u_n \leq 0$ est vraie en 0; elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 0, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

- c) La suite est croissante donc, pour tout n , $u_n \geq u_0$.
 Si $a = 0$, $u_0 = 0$; comme, pour tout n , $u_n \geq u_0$ donc $u_n \geq 0$.
 Or on a vu que, pour tout n , $u_n \leq 0$.
 Donc pour tout n , $u_n = 0$.
 On peut déduire que la suite (u_n) est constante et égale à 0 donc sa limite est 0.

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout n , $u_n \geq a$; comme $a > 0$, on peut en déduire que, pour tout n , $u_n > 0$.

- a) On a vu que, pour tout n , $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.
 Or $0 < a \leq u_n$ pour tout n ; on sait que la fonction g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc $g(0) < g(a) \leq g(u_n)$ et donc $g(u_n) \geq g(a)$ pour tout n .
 On a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geq g(a)$.
- b) Soit \mathcal{P}_n la propriété : $u_n \geq a + n \times g(a)$.

- Pour $n = 0$, $u_0 = a$ et $a + n \times g(a) = a + 0 = a$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang p (où $p \geq 0$), c'est-à-dire $u_p \geq a + p \times g(a)$; c'est l'hypothèse de récurrence.
 On sait que $u_{p+1} - u_p \geq g(a)$; or $u_p \geq a + p \times g(a)$ (HR). Donc $u_{p+1} \geq a + p \times g(a) + g(a)$ ce qui équivaut à $u_{p+1} \geq a + (p + 1) \times g(a)$.
 La propriété est donc vraie au rang $p + 1$.
- La propriété $u_n \geq a + n \times g(a)$ est vraie en 0; elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n .

- c) $a > 0$ donc $g(a) > 0$ car 0 est le minimum de la fonction g , atteint en 0.
 Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n \times g(a)) = +\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$
 Comme $u_n \geq a + n \times g(a)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a + n \times g(a)) = +\infty$, on peut déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif.

- a) On complète l'algorithme :

| | |
|-----------------------|--|
| Variables | n est un entier, u et M sont deux réels |
| Initialisation | u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M |
| Traitement | Tant que $u \leq M$ u prend la valeur $e^{2u} - e^u$ n prend la valeur $n + 1$ Fin tant que |
| Sortie | Afficher n |

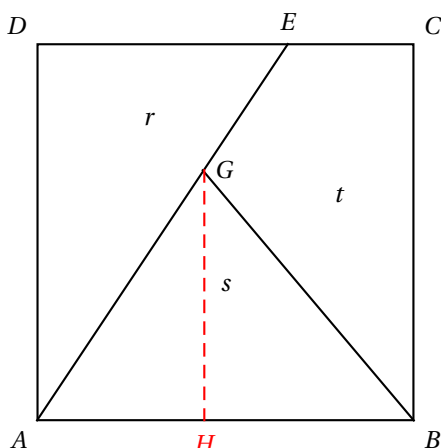
- b) On suppose $M = 60$. On trouve à la calculatrice $u_{35} \approx 2,13$ et $u_{36} \approx 62,35$; donc la valeur affichée par l'algorithme pour $M = 60$ est 36.

Exercice 4

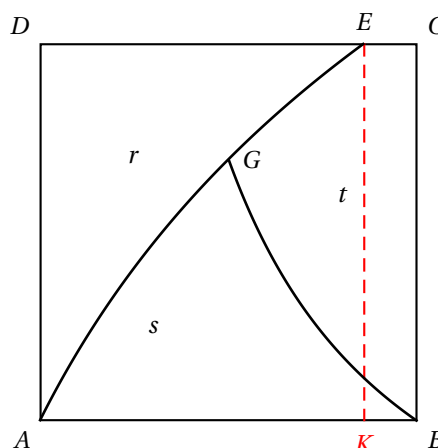
5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \frac{1}{3}$.

- Le point E est situé sur la droite (CD) donc son ordonnée vaut 1.
Le nombre r est l'aire du triangle ADE qui est égale à $\frac{AD \times DE}{2}$.
De plus, cette aire doit valoir $\frac{1}{3}$ et on sait que $AD = 1$.
Donc $\frac{AD \times DE}{2} = \frac{1}{3}$ entraîne $DE = \frac{2}{3}$.
Les coordonnées de E sont donc $(\frac{2}{3}; 1)$.
- Soit H le pied de la hauteur issue de G dans le triangle ABG ; donc GH est l'ordonnée du point G .
L'aire s du triangle ABG est : $\frac{AB \times GH}{2}$. Or $AB = 1$ et $s = \frac{1}{3}$, donc : $\frac{1 \times GH}{2} = \frac{1}{3}$ donc $GH = \frac{2}{3}$.
L'ordonnée y_G de G est $\frac{2}{3}$.
Le point G est situé sur la droite (AE) . Les points A et E ont pour coordonnées respectives $(0; 0)$ et $(\frac{2}{3}; 1)$. Donc la droite (AE) a pour équation $y = \frac{3}{2}x$.
 $G \in (AE)$ d'équation $y = \frac{3}{2}x$ donc $y_G = \frac{3}{2}x_G$. Comme $y_G = \frac{2}{3}$, on déduit que $x_G = \frac{4}{9}$.
Le point G a pour coordonnées $(\frac{4}{9}; \frac{2}{3})$.

Partie B : étude de la proposition B

1. a) D'après le texte, l'ordonnée y_E du point E est égale à 1 et ce point appartient à \mathcal{C}_f donc

$$f(x_E) = y_E \iff \ln(2x_E + 1) = 1 \iff 2x_E + 1 = e \iff x_E = \frac{e-1}{2}$$

- b) L'abscisse du point G vaut 0,5 et le point G appartient à \mathcal{C}_f ; donc :

$$f(x_G) = y_G \iff f(0,5) = y_G \iff \ln 2 = y_G$$

Le point G appartient aussi à \mathcal{C}_g donc :

$$g(x_G) = y_G \iff k \left(\frac{1-x_G}{x_G} \right) = y_G \iff k \left(\frac{1-0,5}{0,5} \right) = \ln 2 \iff k = \ln 2$$

2. a) Soit F la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $F(x) = (x+0,5) \times \ln(2x+1) - x$.

F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et :

$$F'(x) = 1 \times \ln(2x+1) + (x+0,5) \times \frac{2}{2x+1} - 1 = \ln(2x+1) + 1 - 1 = \ln(2x+1) = f(x)$$

Donc f a pour primitive F sur \mathbb{R}_+^* .

- b) Soit K le projeté orthogonal de E sur (AB) . Comme le point E a pour abscisse $\frac{e-1}{2}$, et que la fonction f est positive, l'aire sous la courbe entre 0 et $\frac{e-1}{2}$ est donnée par :

$$\int_0^{\frac{e-1}{2}} f(x) \, dx = [F(x)]_0^{\frac{e-1}{2}} = F\left(\frac{e-1}{2}\right) - F(0) = \frac{e}{2} \ln e - \frac{e-1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

L'aire du rectangle $ADEK$ est $AD \times DE = 1 \times \frac{e-1}{2} = \frac{e-1}{2}$.

$$\text{Donc } r = \frac{e-1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1$$

3. $g(x) = \ln 2 \times \frac{1-x}{x} = \ln 2 \times \left(\frac{1}{x} - 1\right)$

Donc une primitive de g sur $]0; +\infty[$ est donnée par : $G(x) = \ln 2 \times (\ln x - x)$.

4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que $s = [\ln(2)]^2 + \frac{\ln(2) - 1}{2}$.

$$r = \frac{e}{2} - 1 \approx 0,36 \in]0,3; 0,4[$$

$$s = [\ln(2)]^2 + \frac{\ln(2) - 1}{2} \approx 0,33 \in]0,3; 0,4[$$

$$t = 1 - r - s \approx 0,31 \in]0,3; 0,4[$$

Donc la proposition B vérifie les conditions imposées par le fabriquant.

Exercice 4

5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 = z^2$. Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » et notés en abrégé « TP ».

Partie A : généralités

1. Soit (x, y, z) un TP; alors $x^2 + y^2 = z^2$. Soit p un entier naturel non nul.

Alors $p^2 \times x^2 + p^2 \times y^2 = p^2 \times z^2$ ce qui équivaut à $(px)^2 + (py)^2 = (pz)^2$.

Donc (px, py, pz) est aussi un TP.

2. Soit (x, y, z) un TP.

On va utiliser deux résultats connus du cours : un nombre et son carré ont la même parité, et la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

$$\left. \begin{array}{l} x \text{ impair} \Leftrightarrow x^2 \text{ impair} \\ y \text{ impair} \Leftrightarrow y^2 \text{ impair} \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 \text{ pair} \Leftrightarrow z^2 \text{ pair} \Leftrightarrow z \text{ pair}$$

Donc x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance α de 2 par un entier impair k : $n = 2^\alpha \times k$

- a) La décomposition en facteurs premiers de 192 est $2^6 \times 3$; c'est aussi la *décomposition* de 192 au sens donné dans cet exercice.

- b) Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les *décompositions* sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.

$$x = 2^\alpha \times k \Rightarrow x^2 = 2^{2\alpha} \times k^2 \Rightarrow 2x^2 = 2^{2\alpha+1} \times k^2$$

$$z = 2^\beta \times m \Rightarrow z^2 = 2^{2\beta} \times m^2$$

- c) Pour que les deux nombres $2x^2$ et z^2 soient égaux, il faut et il suffit que leurs *décompositions* soient les mêmes (puisque cette *décomposition* est unique); l'un a pour *décomposition* $2^{\alpha+1} \times k^2$ et l'autre $2^\beta \times m^2$.

Ces deux décompositions ne peuvent être les mêmes car $2\alpha + 1$ est impair et 2β est pair.

Donc il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls (x, z) tels que $2x^2 = z^2$.

On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP (x, y, z) , les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant : $x < y < z$.

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. $2015 = 5 \times 13 \times 31$; on en déduit que $2015 = 5 \times 403$.

On sait que $(3, 4, 5)$ est un TP donc, d'après la question 1. $(3 \times 403, 4 \times 403, 5 \times 403)$ est aussi un TP.

Donc $(1209, 1612, 2015)$ est un TP.

2. On admet que, pour tout entier naturel n , $(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = (2n^2+2n+1)^2$.

Si $2n+1 = 2015$, alors $n = 1007$.

Pour $n = 1007$, on a : $(2n^2+2n)^2 = 2030112$ et $(2n^2+2n+1)^2 + 1 = 2030113$.

Donc $(2015, 2030112, 2030113)$ est un TP.

3. a) On cherche deux entiers x et z tels que : $z^2 - x^2 = 403^2 \iff (z-x)(z+x) = 403^2$; or $403^2 = 169 \times 961$. Donc $z^2 - x^2 = 403^2 \iff (z-x)(z+x) = 169 \times 961$.

Les nombres x et z tels que $\begin{cases} z-x = 169 \\ z+x = 961 \end{cases}$ répondent à la question.

$$\begin{cases} z-x = 169 \\ z+x = 961 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 961 - 169 \\ 2z = 169 + 961 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 792 \\ 2z = 1130 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 396 \\ z = 565 \end{cases}$$

Donc $565^2 - 396^2 = 403^2$.

- b) D'après la question **B 3.a)** : $396^2 + 403^2 = 565^2$; on en déduit que $(396, 403, 565)$ est un TP.

En multipliant par 5 on obtient le TP cherché : $(5 \times 396, 5 \times 403, 5 \times 565) = (1980, 2015, 2825)$.