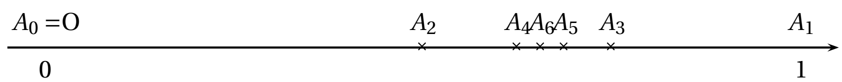
Corrigé du baccalauréat S Centres étrangers 16 juin 2011

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. a.



On a $a_2 = \dfrac{a_0 + a_1}{2} = 0,5$, puis $a_3 = 0,75$, $a_4 = 0,625$ $a_5 = 0,6875$ et $a_6 = 0,65625$

b. Puisque le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$ cela se traduit en abscisses par $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

2. *Initialisation* : $-\dfrac{1}{2}a_0 + 1 = -0 + 1 = 1 = a_1$. La formule est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, $p > 0$ tel que $a_{p+1} = -\dfrac{1}{2}a_p + 1$, qui équivaut à $a_p = 2 - 2a_{p+1}$.

Alors $a_{p+2} = \dfrac{a_p + a_{p+1}}{2} = \dfrac{2 - 2a_{p+1} + a_{p+1}}{2} = \dfrac{2 - a_{p+1}}{2} = 1 - \dfrac{1}{2}a_{p+1}$, donc la relation est vraie au rang $p + 1$.

On a donc démontré que pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.

3. On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1 - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{2}\left(a_n - \dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}v_n$.

La relation pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n$ montre que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - \dfrac{2}{3} = -\dfrac{2}{3}$.

4. On sait que pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_0\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = -\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Or $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Comme $a_n = v_n + \dfrac{2}{3}$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Question 1

Affirmation

Méthode 1 : On a $\text{AB}^2 = |b-a|^2 = |2\text{i}-1|^2 = 4+1 = 5$;

$\text{AC}^2 = |c-a|^2 = \left|\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\right)+\text{i}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)\right|^2 = \left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2 =$

$3+\dfrac{1}{4}-\sqrt{3}+\dfrac{3}{4}+1-\sqrt{3} = 5$;

$\text{BC}^2 = |c-b|^2 = \left|\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\right)+\text{i}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\right|^2 = \left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2 =$

$3+\dfrac{1}{4}+\sqrt{3}+\dfrac{3}{4}+1-\sqrt{3} = 5$.

On a donc AB = AC = BC. L'affirmation est vraie.

Méthode 2 On considère la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

L'image de M d'affixe z par cette rotation est le point M' d'affixe z' telle que :

$z'-b = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(z-b)$ ou $z' = 3\text{i}+\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-3\text{i})$.

L'image de A d'affixe $1+\text{i}$ dans cette rotation est donc le point d'affixe :

$3\text{i}+\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+\text{i}-3\text{i}) = 3\text{i}+\left(\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-2\text{i}) = 3\text{i}+\dfrac{1}{2}-\text{i}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3} =$

$\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}+\text{i}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2\right)$ soit l'affixe du point C. Ceci démontre que le triangle ABC est équilatéral.

Question 2

La transformation est une rotation ; or $\dfrac{2\text{i}}{\sqrt{3}+\text{i}} = \dfrac{2\text{i}\left(\sqrt{3}-\text{i}\right)}{\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)\left(\sqrt{3}-\text{i}\right)} = \dfrac{2\text{i}\sqrt{3}+2}{3+1} =$

$\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3}+\text{i}\sin\frac{\pi}{3} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

L'affirmation est vraie.

Question 3

$\left|-\sqrt{3}+\text{i}\right|^2 = 3+1 = 4 = 2^2 \Rightarrow \left|-\sqrt{3}+\text{i}\right| = 2$; d'où en factorisant ce module :

$-\sqrt{3}+\text{i} = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\text{i}\right) = 2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$.

Donc $a = \left(-\sqrt{3}+\text{i}\right)^{2011} = \left(2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}\right)^{2011} = 2^{2011}\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi\times 2011}{6}} = 2^{2011}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

Un argument de cette puissance est $-\dfrac{\pi}{6}$: ce nombre n'est pas un imaginaire pur. L'affirmation est fausse.

Question 4

On a $P(X \leqslant 2) = 1-\text{e}^{-2\lambda}$ et $P(X \leqslant 3) = 1-\text{e}^{-3\lambda}$.

Il faut calculer $P_{X\geqslant 2}(\leqslant X \leqslant 3) = \dfrac{P(X \geqslant 2 \cap X \leqslant 3)}{P(X \geqslant 2)} = \dfrac{1-\text{e}^{-3\lambda}-1+\text{e}^{-2\lambda}}{\text{e}^{-2\lambda}} = -\text{e}^{-\lambda}+1 = 1-\text{e}^{-\lambda}$. L'affirmation est vraie.

Question 5

On a une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{5}{n}$.

La probabilité d'obtenir 0 noire en 10 tirages est égale à :

$\binom{10}{0}\times\left(\dfrac{5}{n}\right)^{10} = \left(\dfrac{5}{n}\right)^{10}\left(\dfrac{n-5}{n}\right)^{10} = \left(\dfrac{5}{n}\right)^{10}$.

Donc la probabilité d'obtenir au moins une boule noire sur les 10 tirages est le complément à 1 soit : $1-\left(\dfrac{5}{n}\right)^{10}$.

Il faut donc résoudre l'inéquation :

$1-\left(\dfrac{5}{n}\right)^{10} \geqslant 0{,}9999 \iff \left(\dfrac{5}{n}\right)^{10} \leqslant 0{,}0001 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien

$10\ln\left(\dfrac{5}{n}\right) \leqslant \ln 0{,}0001 \iff \ln\left(\dfrac{5}{n}\right) \leqslant \dfrac{\ln 0{,}0001}{10} \iff$

$\ln 5 - \ln n \leqslant \dfrac{\ln 0,001}{10} \iff \ln n \geqslant \ln 5 - \dfrac{\ln 0,001}{10}$.

Or $\ln 5 - \dfrac{\ln 0,001}{10} \approx 2,530$. La calculatrice donne $n \geqslant \mathrm{e}^{2,53} \approx 12,5$.

La plus petite valeur de l'entier n est donc bien égale à 13. L'affirmation est vraie.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Question 1

Une solution évidente de cette équation est $(-2\ ;\ 1)$. On a :

$\left\{\begin{array}{lcl} 2\times(-2)+11\times 1 & = & 7\\ 2x+11y & = & 7\end{array}\right. \Rightarrow$ (par différence membre à membre)

$2(x+2)+11(y-1)=0 \iff 2(x+2)=11(1-y) \quad (3).$

Ceci montre que $2(x+2)$ divise 11 mais comme 2 est premier avec 11, $x+2$ divise 11. (Gauss).

Il existe donc $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $x+2=11\alpha$ soit en remplaçant dans l'équation (3),

$2\times 11\alpha = 11(1-y) \iff 2\alpha = 1-y \iff y = 1-2\alpha$.

Les solutions de (E) sont donc les couples $(-2+11\alpha\ ;\ 1-2\alpha),\quad \alpha\in\mathbb{Z}$.

De plus le couple $(9\ ;\ -1)$ est aussi une solution évidente de (E) et il n'existe pas d'entier k tel que $9=22k-2, \ldots$

L'affirmation est donc fausse.

Question 2

On a $11 \equiv 4 \pmod 7$, donc $N \equiv 4^{2011} \pmod 7$.

Il reste à déterminer les restes des puissances de 4 dans la division euclidienne par 7.

On a $4 \equiv 4 \pmod 7$, $4^2 \equiv 2 \pmod 7$ et $4^3 \equiv 1 \pmod 7$.

Donc $N = \left(4^3\right)^{670} \times 4 \equiv 4 \pmod 7$.

L'affirmation est vraie.

Question 3

Une figure rapide montre que le point C de coordonnées négatives n'est pas situé « du bon côté de [AB] ». D'autre part l'image du point B par la similitude de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ a pour affixe

$\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\left(z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}\right)+z_{\mathrm{A}} = -\mathrm{i}\sqrt{2}(-1+2\mathrm{i})+1+\mathrm{i} = 2\sqrt{2}+1+\mathrm{i}\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Le point C est l'image du point B par la similitude de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

L'affirmation est fausse.

Question 4

L'image du point A par f a pour affixe : $\dfrac{1}{5}(-3-4\mathrm{i})(1-\mathrm{i})+\dfrac{1}{5}(12+6\mathrm{i}) = 1+\mathrm{i} = a$.

L'image du point B par f a pour affixe : $\dfrac{1}{5}(-3-4\mathrm{i})(2+\mathrm{i})+\dfrac{1}{5}(12+6\mathrm{i}) = 2-\mathrm{i} = b$.

La similitude f admet deux points fixes distincts A et B : c'est donc l'identité ou la réflexion d'axe (AB). Mais l'image de O n'est pas O.

L'affirmation est vraie.

Question 5

La surface S est un paraboloïde hyperbolique d'équation $z = 4xy$.

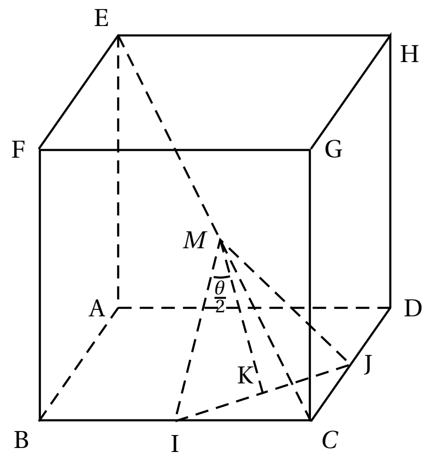
La section avec le plan d'équation $z = 0$ est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'un des deux systèmes $\left\{\begin{array}{l c l} z &=& 0\\ x &=& 0\end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l c l} z &=& 0\\ y &=& 0\end{array}\right.$

C'est donc la réunion des axes (Ox) et (Oy) qui sont deux droites orthogonales de l'espace.

L'affirmation est vraie.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats



1. **a.** C(1 ; 1 ; 0) ; E(0 ; 0 ; 1) ; I$\left(1 ; \frac{1}{2} ; 0\right)$; J$\left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0\right)$.

   b. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in (\text{CE}) \iff$ il existe $\alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{\text{C}M} = \alpha\overrightarrow{\text{CE}}) \iff \left\{\begin{array}{l c l} x-1 &=& -\alpha\\ y-1 &=& -\alpha\\ z-0 &=& \alpha\end{array}\right.$

   $\iff \left\{\begin{array}{l c l} x &=& 1-\alpha\\ y &=& 1-\alpha\\ z &=& \alpha\end{array}\right.$ Finalement :

   $M(x\,;\,y\,;\,z) \in [\text{CE}] \iff$ il existe $\alpha \in [0\,;\,1]$ tel que : $\left\{\begin{array}{l c l} x &=& 1-\alpha\\ y &=& 1-\alpha\\ z &=& \alpha\end{array}\right.$

   Pour $\alpha = 0$, le point est en C, pour $\alpha = 1$ le point est en E.

2. **a.** Un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient au plan médiateur de [IJ] s'il est équidistant de I et de J, c'est-à-dire si $M\text{I} = M\text{J}$ ou $M\text{I}^2 = M\text{J}^2 \iff$

   $(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + z^2 \iff$

   $x^2 + 1 - 2x + y^2 + \frac{1}{4} - y + z^2 = x^2 + \frac{1}{4} - x + y^2 + 1 - 2y + z^2 \iff -x + y = 0 \iff y = x$ équation du plan médiateur.

   Il est évident que C et E ont leurs coordonnées qui vérifient cette équation.

   b. Les coordonnées de M vérifient pour tout $t \in [0\,;\,1]$ l'équation du plan médiateur donc $M\text{I} = M\text{J}$ et le triangle $M\text{IJ}$ est isocèle en M.

   c. On a $\text{I}M^2 = (1-t-1)^2 + \left(1 - t - \frac{1}{2}\right)^2 + (t-0)^2 = t^2 + \frac{1}{4} + t^2 - t + t^2 = 3t^2 - t + \frac{1}{4}$.

3. **a.** Sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ la fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$ avec un maximum en $\frac{\pi}{2}$. Donc la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

b. Dans le triangle IMJ, soit K le milieu de [IJ]. Le triangle étant isocèle en M la droite $(M\text{K})$est médiane et donc aussi hauteur. Le triangle IMK est donc rectangle en K et par définition $\sin\frac{\theta}{2} = \dfrac{\text{IK}}{M\text{I}}$. Par définition de la fonction inverse le sinus est maximal quand le dénominateur IM est minimal.

c. On a $f(t) = 3\left(t^2 - \frac{t}{3} + \frac{1}{12}\right) = 3\left[\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} + \frac{1}{12}\right]$

$= 3\left[\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{18}\right]$.

La forme canonique du trinôme montre que le minimum de la fonction est obtenu pour $x = \dfrac{1}{6}$ et que ce minimum est égal à $f\left(\frac{1}{6}\right) = 3 \times \frac{1}{18} = \dfrac{1}{6}$.

d. On a vu (question 2. c.) que I$M^2 = f(t)$ et que le minimum de IM^2, donc de IM correspond au maximum de l'angle $\widehat{\text{I}M\text{J}}$. Donc le point M_0 de [EC] correspondant à la valeur du paramètre $t_0 = \dfrac{1}{6}$ est le point unique correspondant à la valeur maximale de l'angle $\widehat{\text{I}M_0\text{J}}$.

e. Géométriquement, on sait que la distance d'un point M à une droite (EC) est obtenue avec le projeté orthogonal du point M sur la droite (EC).

Donc le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].

EXERCICE 4 — 6 points

Commun à tous les candidats

1. Étude des fonctions f et g

a. $f(x) = \text{e}x\text{e}^{-x}$ et $g(x) = \text{e}x^2\text{e}^{-x}$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$, d'où par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

b. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\text{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

De même comme pour tout naturel n, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n\text{e}^{-x} = 0$, on a

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

c. f produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle $f'(x) = \text{e}\left(\text{e}^{-x} - x\text{e}^{-x}\right) = \text{e}\text{e}^{-x}(1-x)$.

Comme $\text{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$ qui est positif sur $]-\infty~;~1[$ et négatif sur $]1~;~+\infty[$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		1	
	$-\infty$		0

g produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle

$g'(x) = \text{e}\left(2x\text{e}^{-x} - x^2\text{e}^{-x}\right) = \text{e}\text{e}^{-x}x(2-x)$.

Comme $\text{e}^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme $x(1-x)$ qui est négatif sauf entre les racines 0 et 2.

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

2. Calcul d'intégrales

a. $I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \mathrm{e}\left[-\mathrm{e}^{-1}+1\right] = \mathrm{e}-1$.

b. On a $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

On pose :

$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & x^{n+1} \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & n+1x^n \\ v(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$

Toutes les fonctions sont continues car dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut donc faire une intégration par parties :

$I_{n+1} = \mathrm{e}\left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 (n+1)x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}\left[-\mathrm{e}+0\right] - \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}(n+1)I_n = -1+(n+1)I_n = I_{n+1}$.

c. La formule précédente donne pour $n=0$, $I_1 = -1+I_0 = -1+\mathrm{e}-1 = \mathrm{e}-2$.

Pour $n=1$, $I_2 = -1+2I_1 = -1+2(\mathrm{e}-2) = 2\mathrm{e}-5$.

3. Calcul d'une aire plane

a. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x)-g(x) = x\mathrm{e}^{1-x} - x^2\mathrm{e}^{1-x} = x\mathrm{e}^{1-x}(1-x)$.

Comme $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f(x)$ est celui du trinôme $x(1-x)$, soit négatif sauf entre les racines du trinôme 0 et 1.

Ceci montre que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}'$ sur $]0~;~1[$ et au dessous sur $]-\infty~;~0[$ et sur $]1~;~+\infty[$.

b. On vient de voir que sur l'intervalle $[0~;~1]$ $f(x) \geqslant g(x)$, donc l'aire de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$ est égale à la différence des intégrales :

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = I_1 - I_2 = \mathrm{e}-2-(2\mathrm{e}-5) = 3-\mathrm{e}.$$

par linéarité de l'intégrale.

4. Étude de l'égalité de deux aires

a. On a $S_a = \mathscr{A} \iff 3-\mathrm{e}^{1-a}\left(a^2+a+1\right) = 3-\mathrm{e} \iff -\mathrm{e}^{1-a}\left(a^2+a+1\right) = -\mathrm{e} \iff \mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-a}\left(a^2+a+1\right) = \mathrm{e} \iff \mathrm{e}^{-a}\left(a^2+a+1\right) = 1 \iff$

$a^2+a+1 = \mathrm{e}^a$.

b. Il reste à résoudre l'équation $\mathrm{e}^x = x^2+x+1$ équivalente à $\mathrm{e}^x - x^2 - x - 1 = 0$ sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.

Si on pose, pour tout x réel : $h(x) = \mathrm{e}^x - x^2 - x - 1$, cela revient à chercher un zéro de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle

$h'(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 1$ qui elle-même est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$h''(x) = \mathrm{e}^x - 2$

On a $h''(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^x = 2 \iff x = \ln 2$

Donc $h''(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x - 2 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 2 \iff x > \ln 2$.

h' est continue et strictement croissante sur $[\ln 2\,;\,+\infty[$ et à fortiori sur $[1\,;\,+\infty[$ puisque $\ln 2 \approx 0,69 < 1$.

On a $h'(1) = \mathrm{e}^1 - 2 - 1 = \mathrm{e} - 3 < 0$.

De plus $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h'(x) = +\infty$ (limite obtenue en factorisant e^x.)

Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α, $1 < \alpha$ tel que $h'(\alpha) = 0$.

On en déduit que h est strictement négative sur $]1\,;\,\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

h est donc strictement décroissante sur $]1\,;\,\alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

D'autre part, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1\\ x>1}} h(x) = \mathrm{e} - 3 \approx -0,28$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. Ainsi h est strictement négative sur $]1\,;\,\alpha[$.

Enfin, h étant continue est strictement croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, il existe $\beta \in]\alpha\,;\,+\infty[$, unique, tel que $h(\beta) = 0$.

Avec une table de valeurs ou le solveur de la calculatrice on trouve aisément : $\alpha \approx 1,26$ et $\beta \approx 1,79$. (Voir la figure ci-dessous)

Annexe

(Courbes de l'exercice 4)